

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ 2ÈME SESSION

juin 2017

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1. Pour tout $x \in]0, 1]$, soit

$$f(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

1. Calculer $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
2. Pourquoi f est continue sur $]0, 1]$. Pourquoi f est dérivable sur $]0, 1[$.
3. Pour tout $x \in]0, 1]$, soit $u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Vérifier que

$$u'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1-x}}.$$

Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $f'(x) = 0$.

4. Dédire que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]0, 1]$.

Exercice 2.

1. Calculer une primitive de

$$\int \ln x dx$$

2. Calculer une primitive de

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

avec le changeant de variable $t = e^x$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) - 2xy(x) = \frac{2x}{1+x^2} e^{x^2}.$$

1. Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre l'équation (E).
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles:

1. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2 + 8x + 30$;
2. $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$;
3. $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$.