Correction Planche 4

Exercice 3

4) On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \quad (1)$$

et son équation homogène associée :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad (2).$$

• Cherchons une primitive de la fonction $a : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$. En posant le changement de variables $x = \mathrm{sh}(t)$ (admissible car la fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection dérivable avec sh' continue sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= -\int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}}dt \\
&= -\int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}dt \quad \text{car } \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = 1 \forall t \in \mathbb{R} \\
&= -\int 1dt \quad \text{car } |\mathrm{ch}(t)| = \mathrm{ch}(t) \forall t \in \mathbb{R} \\
&= -t + B, B \in \mathbb{R} \\
&= -\mathrm{argsh}(x) + B, B \in \mathbb{R} \\
&= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + B, B \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = Ce^{-\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \dfrac{C}{x+\sqrt{1+x^2}}, C \in \mathbb{R}$.

• Cherchons une solution particulière de (1) sous la forme $f_p(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x+\sqrt{1+x^2}}$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
f_p'(x) &= \frac{\varphi'(x)(x+\sqrt{1+x^2}) - \varphi(x)\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{1+x^2}} - \varphi(x) \times \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_p'(x) + \frac{f_p(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1 &\Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}} + \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{1+x^2}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \varphi'(x) = x+\sqrt{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Cherchons une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. En posant comme précédemment le changement de variables $x = \mathrm{sh}(t)$ et les formes $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \forall x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}dx &= \int \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}\,\mathrm{ch}(t)dt \\
&= \int \sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{ch}(t)dt \\
&= \int \mathrm{ch}^2(t)dt \\
&= \int \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int \left(e^{2t}+2e^te^{-t}+e^{-2t}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+B, B\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\,\mathrm{argsh}(x)}+2\,\mathrm{argsh}(x)-\frac{1}{2}e^{-2\,\mathrm{argsh}(x)}\right)+B, B\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}+2\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}e^{-2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\right)+B, B\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}+B, B\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$f_p(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right).$$

• **Conclusion :** Les solutions de (1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right)+\frac{C}{x+\sqrt{1+x^2}}, C\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}+C\right), C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$