L1 MCPI 2019-2020

Analyse et Probabilités

PLANCHE 5

Espaces Probabilisés

Exercice 1. Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une classe de n élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. On suppose dans cette question que $n = 366$. Quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ?
2. On suppose dans cette question que $n \leqslant 365$.
   (a) Quelle est la probabilité p_n pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ?
   (b) Trouver le plus petit entier n_1 tel que $p_{n_1} \geqslant 0,5$.
3. Quelle est la probabilité q_n qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que son enseignant ? Calculer q_{366}.

Exercice 3. Dans une classe où tous les élèves pratiquent un sport et un seul, il y a 13 filles et 15 garçons répartis comme suit :

- 4 filles et 6 garçons font du vélo.
- 3 filles et 4 garçons font de la course à pieds.
- 6 filles et 1 garçon font de la gymnastique.
- Les autres garçons font du football.

On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :
A : « L'élève choisi est une fille. »
B : « L'élève choisi est un garçon. »
C : « L'élève choisi fait du vélo. »

1. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « L'élève choisi est un garçon et fait du football » ?
3. Sachant que l'élève choisi fait de la gymnastique, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
4. Sachant que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse de la course à pieds ?

Exercice 4. Cinq chimistes disposent de quatre produits chimiques p_1, p_2, p_3, p_4. À tour de rôle, ils versent dans un même récipient une dose d'un produit chimique qu'ils choisissent au hasard, sans savoir ce que les précédents ont choisi. Le même produit peut alors être choisi plusieurs fois. En mélangeant deux doses de p_1, une dose de p_2 et deux doses de p_4, on obtient un explosif très instable.

1. Déterminer la probabilité que les chimistes aient obtenu le mélange explosif.
2. Sachant que le premier chimiste a versé une dose de p_1 et que le second a versé une dose de p_4, quelle est la probabilité d'obtenir le mélange explosif ?

Exercice 5. Une urne contient 6 boules blanches et 10 boules noires. On effectue 4 tirages successifs et <u>sans remise</u> d'une boule. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : 1 boule noire, 1 boule noire, 1 boule noire, 1 boule blanche.

Exercice 6. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$. On considère les évènements suivants :
A : « La chaudière est sous garantie ».
B : « La chaudière est défectueuse ».
C : « La chaudière est sous garantie et est défectueuse ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
2. Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

Exercice 7. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges. Si on tire une boule bleue, on lance la roue bleue. Si on tire une boule rouge, on lance la roue rouge. Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand une roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur. Tous les secteurs ont la même chance d'être « choisis » par la flèche.
<u>Secteurs roue bleue :</u> Perdu, Gagné 2€, Perdu, Gagné 10€, Perdu, Gagné 4€, Perdu, Gagné 2€.
<u>Secteurs roue rouge :</u> Perdu, Gagné 6€, Perdu, Gagné 2€, Perdu, Perdu, Perdu, Gagné 2€.
On considère les évènements suivants :

- B : « Tirer une boule bleue ».
- R : « Tirer une boule rouge ».
- G : « Gagner ».
- D : « Gagner 2€ ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$ puis $\mathbb{P}(R)$.
2. On a tiré une boule bleue. Quelle est la probabilité de gagner ?
3. Calculer $\mathbb{P}(G)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(D)$.
5. Sachant que l'on a gagné 2€, quelle est la probabilité que l'on ait lancé la roue bleue ?

Exercice 8. À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part, certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part, certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif. Le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur. On note

- D l'évènement « Le sportif est dopé ».
- O l'évènement « Le sportif est déclaré positif ».
- E l'évènement « Le comité a commis une erreur ».

1. Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs, 50% ne sont pas dopés et que le comité déclare positifs 20% des sportifs indépendamment du fait que le sportif soit dopé ou non. On choisit un sportif au hasard. Calculer :

   (a) La probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif.

   (b) La probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif.

   (c) La probabilité $\mathbb{P}(E)$.

2. Dans cette question, on note p la proportion de dopés parmi les sportifs. On suppose que la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif soit réellement dopé ou non. On possède les informations suivantes :
   - La probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est de $0,9$.
   - La probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est de $0,1$.

   On choisit un sportif au hasard. Calculer :

   (a) La probabilité $\mathbb{P}(E)$.

   (b) En fonction de p, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.

   (c) On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé. Montrer que cette probabilité est de $\dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$.