L1 MCPI 2019-2020

Analyse et Probabilités

Planche 6

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Une urne contient neuf boules. Quatre de ces boules portent le numéro 0, trois portent le numéro 1 et deux portent le numéro 2. On tire au hasard deux boules simultanément. Tous les tirages sont supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur ces boules.

1. Déterminer la loi de X.
2. Représenter la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(n)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exercice 3. On lance une fois un dé non pipé.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points du dé. Donner la loi de X et son espérance.
2. On suppose que l'on reçoit 15€ si on obtient 1, rien si on obtient 2, 3 ou 4 et 6€ si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire représentant le gain de ce jeu. Donner la loi de G et représenter sa fonction de répartition. Quel est le gain moyen ?
3. On suppose maintenant que l'on reçoit 27€ pour un 1 et rien sinon.

Exercice 4. On jette 2 dés. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres obtenus, Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux et Z la différence, en valeur absolue, des points obtenus.

1. Déterminer la loi de X. Tracer sa fonction de répartition.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de Z.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.
5. Calculer l'espérance de Y et Z.

Exercice 5. Soient $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(p)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Exercice 7. Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'est pas réussi d'un deuxième service. La probabilité que le premier service réussisse est de $\frac{2}{3}$. S'il est raté, la probabilité que le deuxième service réussisse est de $\frac{4}{5}$. Lorsque les deux services échouent, il y a « double faute », sinon la mise en jeu est réussie.

1. Déterminer la probabilité que, sur une mise en jeu, le joueur fasse une double faute.
2. En déduire la probabilité que la mise en jeu soit réussie.
3. Le joueur effectue 10 mises en jeu successives (dont les résultats sont indépendants les uns des autres). Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de mises en jeu réussies.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur réussisse au moins 9 mises en jeu.
   (c) Le joueur peut-il être considéré comme plutôt mauvais ou plutôt bon ?

Exercice 8. Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention de la première boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués jusqu'à l'obtention de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. On admet que pour tout q dans $[0,1[$, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.
5. On pose $Y = X_2 - X_1$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 9. Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'un herbicide et 8 doses d'un fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes sont indifférentiables. Chaque dose a la même probabilité d'être tirée. En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de doses d'herbicide présentes parmi ces 6 doses. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

1. Calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 11. On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in]0,1[$. Un individu joue avec cette pièce de la façon suivante : il lance d'abord la pièce jusqu'à ce qu'il obtienne un premier pile. Si ce premier pile a été obtenu au lancer numéro n, il lance ensuite sa pièce n fois. On note N le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile et X le nombre de piles obtenus lors de la deuxième série de lancers.

1. Déterminer la loi du couple (N,X).
2. Déterminer la loi de X. *Indication : on admettra que* $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
3. Montrer que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p')$, l'autre suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p')$, avec $p' \in]0,1]$ à déterminer. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 12. Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$, $N \geqslant n$, $p \in [0,1]$, $Np \in \mathbb{N}$ et $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{Var}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

Indication : Utiliser la formule de Vandermonde $\forall a,b,c \in \mathbb{N} : c \leqslant a+b,\ \sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$.

♣ **Exercice 13.** On suppose que la probabilité de trouver une coquille sur une page d'un livre donné est de $0,01$. On suppose qu'une page contient au plus une coquille. Soit X la variable aléatoire à support fini correspondant au nombre de coquilles observées dans un livre de 100pages.

1. Déterminer la loi de X et calculer la probabilité que le livre contienne au plus une coquille.
2. On considère Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
   Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant 1)$.
3. Quelle conjecture peut-on tirer de cet exercice ?

♣ **Exercice 14.** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}$ fixé, X une variable aléatoire discrète finie sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si φ est injective, alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

♣ **Exercice 15.** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires discrètes finies sur Ω. Montrer qu'on a les propriétés suivantes

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
3. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac \times \mathrm{Cov}(X,Y)$.
4. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + 2 \times \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$.
5. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 16. Soient $p \in]0,1]$ et $X \sim \mathscr{G}(p)$. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 17. Soit $\lambda > 0$ et $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Exercice 18. Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et X, Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Montrer que si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

♣ **Exercice 19.** Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \frac{1}{1+X},\ Z = \frac{1}{(1+X)(2+X)} \text{ et } W = \frac{1}{2+X}.$$

Déterminer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$ puis en déduire $\mathbb{E}(W)$.

Indication : On pourra utiliser la formule (admise), $\forall \lambda \in \mathbb{R}, e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.