Aix–Marseille Université 2018-2019

Mathématiques 1

Portail Marie Curie - Physique Chimie SPI

Devoir surveillé n°2

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(3x - \pi)$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)$.
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, prouver que l'équation suivante admet au moins une solution dans $[0, \pi]$:
$$\cos(x) - x^2 = 0.$$

Exercice 2.

On considère la fonction réelle $f : x \mapsto 2\sqrt{x}\arctan(x^2) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur son domaine I de définition maximale.

1. Déterminer I.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
3. Calculer f'.

Exercice 3.

1. Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 des fonctions définies par
   - $g_1(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)$;
   - $g_2(x) = \sqrt{\cos(x)}$;
   - $\frac{1}{g_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$;
2. Montrer que $h(x) = \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3}x - \dfrac{31}{36}x^3 + o(x^3)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction h en 0, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 - x}{1 + 6x^5}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{x^2+1}}{2x}$.

Exercice 5.

1. Déterminer la limite de $\frac{x^3-1}{x-1}$ en 1.
2. En justifiant votre réponse, déterminer un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que l'application
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 1, \end{cases}$$
soit continue sur $\mathbb{R}$.

Fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x}$, $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt[n]{x}$, $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Développements limités (DL)

Rappel : Le DL au point 0 à l'ordre n d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ s'écrit de la façon suivante à l'aide de la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$

À l'aide de cette formule, on obtient les DL suivants au point 0 (à divers ordres) pour les fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).\\
\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).\\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).
\end{aligned}$$