Université d'Aix-Marseille | **Année 2018-2019**
L1-PEIP | **U.E. Introduction à l'Analyse**

Examen 2nde Session

Lundi 3 juin 2019

durée : 3h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les téléphones portables, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés.

La présentation et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. Toute réponse devra être justifiée

---

Exercice 1. Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f\colon x \mapsto \ln(1+x-\sqrt{1+x})$

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{a} \geqslant a$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction f.
   (b) Déterminer la valeur de $f'(x)$ sur l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Montrer que f réalise une bijection de $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on déterminera.
4. Calculer $f(1)$ et $(f^{-1})'(\ln(2-\sqrt{2}))$.

Exercice 2.

1. On considère la fonction $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$.
   (a) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité.
   (c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   Indication : On pourra utiliser les deux suites $u_n = \dfrac{1}{\pi n}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$.
2. On considère maintenant la fonction $g\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$.
   (a) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de g, ainsi que la valeur de sa dérivée sur son ensemble de dérivabilité.
   (b) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0, en une fonction qu'on notera $\tilde{g}$.
   (c) La fonction $\tilde{g}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $\tilde{g}'(0)$.
3. Finalement, on considère la fonction $h\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$.
   (a) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de h, ainsi que la valeur de sa dérivée sur son ensemble de dérivabilité.
   (b) Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 0, en une fonction qu'on notera $\tilde{h}$.
   (c) La fonction $\tilde{h}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $\tilde{h}'(0)$.

Exercice 3.

1. (a) Trouver une racine évidente du polynôme t^3+t^2+t-3 et factoriser ce polynôme.
   (b) Grâce à une décomposition en éléments simples, calculer une primitive de la fonction

$$f(x) = \frac{2t}{t^3+t^2+t-3}.$$

2. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\ln^2(t)\ln(\ln(t))}{t}dt.$
   (a) En effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$, montrer que $I = \displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx.$
   (b) Calculer I grâce à une intégration par parties.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y' + \tan(t)y = \sin(2t) \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre (E).
4. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$? Si oui, l'exprimer.
5. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant la condition initiale $y'(0) = 1$? Si oui, l'exprimer.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x} \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. (a) Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = e^{3x} \qquad \text{(E1)}$$

   (b) Soit $f : x \mapsto P(x)\cdot e^x$, où P est un polynôme quelconque. Calculer pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f''(x) - 2f'(x) + f(x)$.
   (c) Déduire de ce qui précède une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x \qquad \text{(E2)}$$

3. Résoudre l'équation (E).
4. Exprimer si possible une solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.