Résumé : les suites numériques

Définitions *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite*

- . *<u>stationnaire</u> (ou constante) à partir d'un certain rang* n_0 *si :* $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$.
- . *<u>périodique</u> si :* $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+n_0} = u_n$.
- . *<u>arithmétique</u> de raison* r *si :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ *et alors* $u_n = u_0 + n \times r$.
- . *<u>géométrique</u> de raison* q *si :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$ *et alors* $u_n = u_0 \times q^n$.
- . *<u>majorée</u> si :* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
- . *<u>minorée</u> si :* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.
- . *<u>bornée</u> si :* $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$ *et de façon équivalente :* $\exists M \geqslant 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$.
- . *<u>croissante</u> si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.
- . *<u>strictement croissante</u> si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- . *<u>décroissante</u> si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$.
- . *<u>strictement décroissante</u> si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
- . *<u>monotone</u> si elle est croissante ou décroissante.*
- . *<u>strictement monotone</u> si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*
- . *<u>convergente</u> si* $\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.}$
- . *<u>divergente vers</u>* $+\infty$ *si :* $\boxed{\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n > M.}$
- . *<u>divergente vers</u>* $-\infty$ *si :* $\boxed{\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n < -M.}$
- . *<u>divergente</u> si elle n'est pas convergente ou si elle tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Définition *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle, on appelle <u>suite extraite</u> ou <u>sous-suite</u> de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la forme*

$$v_n = u_{\varphi(n)}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante. (Exemple :* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$*...)*

Corollaire *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet deux sous-suites (ou plus !) convergeant vers des limites distinctes alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas.*

Propriétés *On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les limites possibles pour la suite produit* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont résumées dans le tableau suivant :*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell_u \in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_v \in \mathbb{R}^*$	$\ell_u \times \ell_v$	0	*signe*$(\ell_v) \times +\infty$	*signe*$(\ell_v) \times -\infty$
0	0	0	*Forme indéterminée*	*Forme indéterminée*
$+\infty$	*signe*$(\ell_u) \times +\infty$	*Forme indéterminée*	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	*signe*$(\ell_u) \times -\infty$	*Forme indéterminée*	$-\infty$	$+\infty$

Proposition

- . *Toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et majorée converge vers* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- . *Toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante et minorée converge vers* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Définition *(Suites adjacentes)*
Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites <u>adjacentes</u> si*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
4. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Théorème *Deux suites adjacentes convergent et ce vers une même limite.*

Proposition *(Comparaison de suites convergentes)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles convergentes telles que*

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \tilde{N} \Rightarrow v_n \leqslant u_n,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Proposition *(Suite géométrique)*
On fixe un réel a. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de terme général* $u_n = a^n$. *Alors on a le résultat suivant :*

1. *Si* $a = 1$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1.
2. *Si* $a > 1$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$.
3. *Si* $-1 < a < 1$, *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0.*
4. *Si* $a \leqslant -1$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge en ayant aucune limite.*

Proposition *(Série géométrique)*
On fixe un réel a, $a \neq 1$. *En notant* $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n$, *on a* $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

Théorème *(Théorème des gendarmes)*
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites réelles telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers un même réel* ℓ *alors* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* ℓ.

Corollaire *On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |v_n|$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$$\textit{Alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Corollaire *On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$$\textit{Alors } \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0.$$

Proposition *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes non nuls et telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q$.

$$\textit{Si } q < 1 \textit{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Définition *On appelle* <u>*valeur d'adhérence*</u> *(ou point d'accumulation) d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, tout réel* ℓ *qui est limite d'une sous suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème *(Bolzano-Weirestrass) Toute suite réelle* <u>*bornée*</u> *admet une sous-suite convergente.*