Université d'Aix-Marseille | **Année 2017-2018**
L1-PEIP | **U.E. Introduction à l'Analyse**

Seconde session
juin 2018

durée : 3h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice A Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \arccos(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

1. On considère le domaine $\mathcal{D} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   (a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que g est aussi continue en 0 et 1.
2. (a) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathcal{D}$ et donner les différentes expressions de $g'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$.
   (b) Montrer que g est dérivable en 0.
   (c) La fonction g est-elle dérivable en 1 ?

Exercice B On considère les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathcal{D}_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right). \end{array}$$

1. Déterminer les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de f et g.
2. Calculer $f(0), f(1)$ et $f(-1)$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, écrire $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
4. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, simplifier l'expression de $f(x)$ en justifiant votre réponse.
5. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, simplifier l'expression de $g(x)$ en justifiant votre réponse.

Exercice C On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}.$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0? Si oui, donner la définition de ce prolongement.

Exercice D Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx.$$

Exercice E

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} R : \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{4t^2 + 7t + 1}{t + 2}. \end{array}$$

   Calculer une primitive de R sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Montrer que $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

3. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ et les résultats des questions précédentes, déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{4x + 7\sqrt{x} + 1}{2x + 4\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

4. On considère l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$:

$$(2x + 4\sqrt{x})y'(x) - (4x + 7\sqrt{x} + 1)y(x) = 0. \quad (E)$$

   Donner la forme générale des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice F On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -7e^{-3x}. \quad (\tilde{E})$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à $(\tilde{E})$.
2. Trouver un réel k tel que $f_p : x \mapsto kxe^{-3x}$ soit une solution particulière de $(\tilde{E})$.
3. Résoudre $(\tilde{E})$ sur $\mathbb{R}$.