Année universitaire 2016/2017

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^er semestre ☒ 2^ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence Math-Info
Code du module : SMI2U1 Libellé du module : Analyse 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Les deux premiers exercices sont indépendants l'un de l'autre mais donnent deux preuves différentes d'un même résultat.

Exercice 1

Pour $u_0 \geqslant 0$ réel donné on définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes positifs ou nuls par

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

On va justifier que cette suite est convergente, vers disons un réel l. Par un argument de continuité au point l de la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ on va trouver une équation vérifiée par l. Finalement, on va en déduire que $l = 2$.

1. Montrer par récurrence
   (1a) que si $u_0 \geqslant 2$ alors $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 0$
   et (1b) que si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$ alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. Montrer que
   $$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante si $u_0 \geqslant 2$ et croissante si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.
4. Justifier correctement la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers une limite l positive ou nulle.
5. Écrire formellement avec des quantificateurs qu'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue en un point $l \in \mathbb{R}^+$.
6. Considérons la fonction
   $$f(x) = \sqrt{2+x}$$
   de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour $x, l \in \mathbb{R}^+$ on a
   $$|f(x) - f(l)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-l| \leqslant |x-l|.$$
   Justifier alors la continuité de f en tout point $l \in \mathbb{R}^+$
7. D'après le cours, si $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue en un point $l \in \mathbb{R}^+$ et si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes dans $\mathbb{R}^+$ converge vers l, que peut-on dire de la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$?
8. Déduire de tout ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie au début de cet exercice est convergente vers un réel l vérifiant
   $$l \geqslant 0 \text{ et } l = \sqrt{2+l}$$
   et que donc $l = 2$, et ce quel que soit le choix du premier terme $u_0 \geqslant 0$.

Exercice 2
Pour $u_0 \geqslant 0$ réel donné on définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes positifs ou nuls par

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

On va supposer cette suite convergente, vers disons l. En formant une équation vérifiée par l on va montrer qu'alors nécessairement $l = 2$. En majorant explicitement $|u_n - 2|$ on va finalement montrer que cette suite converge effectivement vers 2.

1. On suppose $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergente vers un réel l.
   En utilisant les résultats de cours sur les comportements des suites convergentes, montrer d'abord que $l \geqslant 0$. Puis en remarquant que $u_{n+1}^2 = 2 + u_n$, montrer alors que $l = 2$.
2. Montrer que
   $$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{2+u_n}+2}$$
   et en déduire que
   $$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|.$$
3. Montrer par récurrence sur $n \geqslant 0$ que
   $$2^n \geqslant n+1$$
   puis que
   $$|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2^n} \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{n+1}.$$
4. Écrire formellement avec des quantificateurs qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente vers un réel l.
5. Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie au début de cet exercice est convergente vers 2.

Exercice 3
Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux fonction dérivables vérifiant $f' = f$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$, trois des propriétés de la fonction exponentielle.
Calculer la dérivée de la fonction f/g et en déduire correctement que $f = g$.

Exercice 4
Donner les développements limités à l'ordre 3 au point 0 des fonctions sin et tan, en expliquant comment vous les avez obtenus.
En utilisant ces deux développements limités à l'ordre 3, montrer l'existence et trouver la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$