Introduction à l'analyse
Planche 2 BIS

Exercice A
Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation puis calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2}), \quad g(x) = \ln(\frac{x^2 + x - 1}{-3x + 5}) \quad \text{et} \quad h(x) = \exp(\sqrt{\frac{2 - x}{3x + 1}}).$$

Exercice B
On considère les fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\exp(-x). \end{array}$$

Déterminer leur ensemble de définition, puis les ensembles $f_1([1, +\infty[)$ et $f_2(\mathbb{R}^+)$.

Exercice C
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln(\frac{1 + x}{1 - x}), \quad g(x) = e^{-x} + e^x \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Exercice D
On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis celui de dérivation de f. Calculer la dérivée de f.
2. Calculer les limites. Déterminer le tableau des variations, et représenter graphiquement f.

Exercice E
On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\tan(x)+1}{\tan(x)-1}. \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivation de f, et calculer la dérivée de f.
3. Calculer les limites. Déterminer le tableau des variations, puis représenter graphiquement f.
4. On se place sur l'intervalle $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$. Déterminer $f(]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[)$.
   On notera I cet intervalle. Démontrer que $f :]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\to I$ est bijective.

Exercice F
1. Résoudre l'équation suivante $\arcsin(x) = 2\arccos(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \epsilon\frac{\pi}{2}$ où $\epsilon = 1$ si $x > 0$ et $\epsilon = -1$ si $x < 0$.
3. Soient $a, b > 0$ tels que $ab < 1$. Montrer que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right)$.
4. Résoudre l'équation suivante $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice G
Pour chaque expression suivante, dire pour quelles valeurs de x elle est définie et pour quelles valeurs de x elle est égale à x.
1. $(\sqrt{x})^2$ et $\sqrt{x^2}$.
2. $\exp(\ln(x))$ et $\ln(\exp(x))$.
3. $\cos(\arccos(x))$ et $\arccos(\cos(x))$.
4. $\sin(\arcsin(x))$ et $\arcsin(\sin(x))$.
5. $\tan(\arctan(x))$ et $\arctan(\tan(x))$.