Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2016-2017

Introduction à l'analyse
Planche 3

Exercice 1
Trouver une primitive de la fonction

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}.$$

Exercice 2
Trouver une primitive de la fonction

$$\begin{array}{rcl} g :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

Indication : rappeler la dérivée de la fonction arcsin.

Exercice 3
Trouver une primitive de la fonction

$$\begin{array}{rcl} h :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x^2}. \end{array}$$

Indication : chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1+x}$.

Exercice 4
Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx.$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ d) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx$

e) $\displaystyle\int \sin(x)\cos^3(x)dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx$ g) $\displaystyle\int e^{\sin^2(x)}\sin(x)\cos(x)dx.$

Exercice 5
Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\sin(x)dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(5x)+\sin(2x)]dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} [1+\tan^2(x)]dx$ g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx.$

Exercice 6
Trouver une primitive de

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}.$$

Indication : faire une intégration par parties.

Exercice 7
Trouver une primitive de la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}.$$

Indication : faire une intégration par parties.

Exercice 8
Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide d'une intégration par parties :
a) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^x dx.$ b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}.$

Exercice 9
Effectuer deux intégrations par parties pour calculer les intégrales suivantes :
a) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-x} dx,$ b) $\displaystyle\int_a^b e^x \cos x dx,$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 x^2 \sin(2x) dx.$

Exercice 10
Préciser l'intervalle sur lequel la fonction suivante est définie puis la calculer :

$$F(x) = \int \sin(\sqrt{x}) dx.$$

Indication : utiliser le changement de variables $x = t^2$.

Exercice 11
Trouver une primitive de

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2}. \end{array}$$

Indication : utiliser le changement de variables $x = \sin t$.

Exercice 12
En utilisant un changement de variables, trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos^3(x)$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ c) $h(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}$ d) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ e) $l(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$

Exercice 13
On considère la fonction réelle suivante : $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-5)}.$
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Décomposer f, qu'on appelle fraction rationnelle, en une somme de deux fractions.
3. En déduire toutes les primitives de f.

Exercice 14
On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x dx.$
1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 15
Soit n un entier naturel. Calculer l'intégrale : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx.$
Indication : si $n \geqslant 2$, intégrer par parties afin d'obtenir la relation de récurrence $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$, $\forall n \geqslant 2$.