Schémas volumes finis « flux-splitting » pour une loi de conservation scalaire hyperbolique avec forçage stochastique

Caroline Bauzet, LMA, Université d'Aix-Marseille

Julia Charrier, I2M, Université d'Aix-Marseille

Thierry Gallouët, I2M, Université d'Aix-Marseille

Mots-clés : EDP stochastique, problème hyperbolique du premier ordre, bruit multiplicatif, formule d'Itô, méthode volumes finis, mesure de Young, entropie de Kruzhkov ...

Dans ce travail, on s'intéresse au problème de Cauchy pour une loi de conservation scalaire stochastique d'inconnue u, dont l'écriture probabiliste est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} du + \operatorname{div}\left[\vec{V} f(u)\right] dt &=& g(u) dW & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u(\omega, x, 0) &=& u_0(x), & \omega \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^d, \end{array} \right. \tag{1}$$

$i.e.$, P-presque sûrement dans Ω et pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times [0,T))$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(\omega,x,t)\partial_t \varphi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}\big[\vec{V} f(u(\omega,x,t))\big]\varphi(x,t)dxdt$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t g(u(\omega,x,s))dW(s)\partial_t\varphi(x,t)dxdt,$$

où div est l'opérateur divergence. On considère $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement Brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, continu, à valeurs réelles et défini sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que

H_1 : $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

H_2 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne et telle que $f(0) = 0$.

H_3 : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, bornée et telle que $g(0) = 0$.

H_4 : $\vec{V} \in \mathbb{R}^d$.

Notons que, même dans le cas déterministe ($i.e$ lorsque $g = 0$), il n'y a pas en général unicité des solutions faibles pour ces lois de conservation scalaires non-linéaires. Le défi mathématique consiste alors à poser un critère qui permette de sélectionner parmi toutes les solutions faibles la solution physiquement admissible. Nous utilisons dans ce travail une version stochastique du critère d'entropie introduit dans le cas déterministe par S.N. Kruzhkov dans les années 70. Précisément, nous nous appuyons sur le cadre théorique développé par C. Bauzet, G. Vallet et P. Wittbold [1], où les auteurs ont montré l'existence et l'unicité de la solution faible entropique stochastique du Problème (1).
L'objectif du travail d'analyse numérique [2] que je vais exposer est d'approcher par la méthode volumes finis cette solution faible entropique. L'idée est d'adapter les techniques de discrétisation bien connues dans le cas déterministe au cas stochastique.

Nous considérons ici un schéma volumes finis de type « flux-splitting », qui consiste à décomposer la fonction de flux f comme somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante et d'utiliser un schéma upwind décentré à gauche (resp. à droite) sur la partie croissante du flux (resp. sur la partie décroissante). La principale difficulté de cette étude porte sur l'obtention des formulations entropiques discrètes vérifiées par la solution du schéma volumes finis. La version stochastique des inégalités d'entropies contient deux nouveaux termes qu'il convient de prendre en compte avec attention : une intégrale stochastique qui apporte des contraintes de mesurabilité et un terme incluant la dérivée seconde de l'entropie. À cause de ce deuxième terme, il n'est pas possible comme dans le cas déterministe de proposer une formulation entropique incluant des entropies de Kruzhkov (qui n'ont pas la régularité recquise), nous sommes limités à l'utilisation d'entropies régulières. Par le biais de solutions très faibles (solutions mesures) et en utilisant le résultat d'unicité introduit dans [1], nous montrons la convergence de la solution du schéma vers l'unique solution faible entropique du Problème (1).

Références

[1] C. Bauzet, G. Vallet and P. Wittbold, *The Cauchy problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2012.

[2] C. Bauzet, J. Charrier and T. Gallouët, *Convergence of flux-splitting finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation*, soumis.