Introduction à l'analyse

Correction du partiel 2

Exercice 1

1. Pour tous $a \in]0, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}$, le nombre réel a^x est défini comme :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

2. **Théorème d'intégration par parties.** Soit I un intervalle ouvert, et soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues et dérivables sur I. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels tels que $a < b$ et $[a, b] \subset I$, et tels que u' et v' sont continues sur $[a, b]$. On a alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

3. Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{5}\sin(5x)$ et $v : x \mapsto x$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives $u' : x \mapsto \cos(5x)$ et $v' : x \mapsto 1$. Ces dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties, qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{5}} x\cos(5x)dx &= \left[x \cdot \frac{1}{5}\sin(5x)\right]_0^{\frac{\pi}{5}} - \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1}{5}\sin(5x)dx \\
&= \frac{\pi}{25}\sin(\pi) - 0 - \left[-\frac{1}{25}\cos(5x)\right]_0^{\frac{\pi}{5}} \\
&= \frac{1}{25}\cos(\pi) - \frac{1}{25}\cos(0) \\
&= \boxed{-\frac{2}{25}}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\to x^{-\ln(x)}. \end{aligned}$$

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a, par définition de $x^{-\ln(x)}$ (cf. exercice 1) :

$$x^{-\ln(x)} = e^{-\ln(x).\ln(x)} = e^{-\ln(x)^2}$$

2. On a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty,$$

donc puisque

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} -x^2 = -\infty,$$

le théorème de composition des limites donne $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -(\ln(x))^2 = -\infty$. De même, puisque $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\ln(x)^2} = 0}$$

On a de même :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

et puisque

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} -x^2 = -\infty,$$

le théorème de composition des limites donne cette fois $\lim_{x\longrightarrow+\infty} -(\ln(x))^2 = -\infty$. En outre, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

on obtient par ce même théorème :

$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{-\ln(x)^2} = 0}$$

3. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x^2$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f : x \mapsto e^{-(\ln(x))^2}$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme composée d'applications dérivables.

Ainsi, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, f est dérivable en x, et on a, par le théorème de dérivation des applications composées :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(e^{-\ln(x)^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(-\ln(x)^2\right)\cdot e^{-\ln(x)^2} \\ &= \frac{d}{dx}(\ln(x))\cdot(-2\ln(x))\cdot e^{-\ln(x)^2} \\ &= \boxed{-\frac{2\ln(x)}{x}e^{-\ln(x)^2}} \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in\,]0,1[$, on a $\ln(x) < 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$. Puisque f est continue, on peut appliquer le théorème de la bijection continue, qui permet d'affirmer que $f :]0,1[\longrightarrow f(]0,1[)$ est bijective, et que

$$f(]0,1[) = \left]\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x), \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)\right[.$$

Puisque f est continue en 1, on $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = f(1) = 1$, et on a vu à la question 2 que $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$. On trouve ainsi :

$$\boxed{f(]0,1[) =]0,1[}$$

De même, pour tout $x \in\,]1,+\infty[$, on a $\ln(x) > 0$, donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, et puisque f est continue, on peut appliquer le théorème de la bijection continue. Ainsi, $f : [1,+\infty[\longrightarrow f([1,+\infty[)$ est bijective, et on a :

$$f([1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right],$$

Le sens des bornes est renversé puisque la fonction est décroissante sur l'intervalle considéré. On a, d'après la question 2, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$, et comme précédemment $f(1) = 1$. Ainsi,

$$\boxed{f([1,+\infty[) =]0,1]}$$

On trouve finalement :

$$f(]0,+\infty[) = f(]0,1[\cup[1,+\infty[) = f(]0,1[)\cup f([1,+\infty[) =]0,1[\cup]0,1] = \boxed{]0,1]}$$

Exercice 3

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

1. Puisque $x \mapsto 1-x$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et que $\{x\in\mathbb{R}; 1-x\neq0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, la fonction $u : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. On a donc :

$$\boxed{D_u = D_{u'} = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

Détermination des limites : On a quatre limites à déterminer :

a.
$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \boxed{-1}$$

$$\text{puisque } \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}+1 & = & 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}-1 & = & -1 \end{array} \right.$$

b.
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} u(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{1+x}{1-x} = \boxed{+\infty}$$

$$\text{puisque } \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} 1+x & = & 2 \\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x & = & 0^+ \end{array} \right.$$

c.
$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} u(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1+x}{1-x} = \boxed{-\infty}$$

$$\text{puisque } \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} 1+x & = & 2 \\ \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x & = & 0^- \end{array} \right.$$

d.
$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \boxed{-1}$$

$$\text{puisque } \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+1 & = & 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1 & = & -1 \end{array} \right.$$

Détermination du sens de variation de u : La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$u'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{(1-x)-(-1)\cdot(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a donc $u'(x) > 0$, donc u est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$u(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow -1$

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$. Ainsi, f est définie sur l'ensemble $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} ; -1 \leqslant \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1\right\}$.
On voit sur le tableau de variation que pour tout $x > 1$, on a $\frac{1+x}{1-x} < -1$. Ainsi, $D_f \cap]1, +\infty[= \emptyset$.
Pour tout $x \in]-\infty, -1[$, on a $u(x) > -1$. En outre, la fonction u étant strictement croissante sur $]-\infty, -1[$, pour déterminer $\{x \in]-\infty, -1[\,; u(x) \leqslant 1\}$, il suffit de trouver $x_0 \in]-\infty, -1[$ tel que $u(x_0) = 1$. Un tel x_0 existe par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$.
Pour tout $x \in]-\infty, -1[$, on a la suite d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} u(x) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1-x} = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad 1+x = 1-x \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a, si $x_0 = 0$,

$$\{x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,; u(x) \in [-1,1]\} = \{x \in]-\infty, 1[\,; u(x) \leqslant 1\} = \{x \in]-\infty, 1[\,; x \leqslant x_0\} =]-\infty, x_0] =]-\infty, 0]\,.$$

Donc :

$$\boxed{D_f =]-\infty, 0]}$$

3. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{puisque} \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} & = & -1 \\ \lim_{x\to-1} \arcsin(x) & = & \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

De plus :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{puisque} \left\{ \begin{array}{rcl} \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1+x}{1-x} & = & 1 \\ \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \arcsin(x) & = & \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

4. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc en particulier sur $D_f =]-\infty, 0]$. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et on a $u(]-\infty,0[) =]-1,1[$ puisque u est strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et que ses limites en $-\infty$ et 0 sont respectivement -1 et 1. Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[$ comme composée de fonctions dérivables. Donc :,

$$\boxed{D_{f'} =]-\infty, 0[}.$$

On calcule la dérivée de f en utilisant les formules usuelles de dérivées des fonctions composées : pour tout $x \in D_{f'}$, on calcule, en utilisant le fait que $1-x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arcsin'(u(x))\cdot u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}}\frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2-(1+x)^2}}\frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)}\frac{1}{\sqrt{2\cdot(-2x)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4}}\frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}} = \boxed{\frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}}, \end{aligned}$$

On a utilisé l'identité remarquable $(1-x)^2-(1+x)^2 = ((1-x)-(1+x))\cdot((1-x)+(1+x)) = -4x$

Exercice 4

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, donc $x^2+2x+1=0$ si et seulement si $x=-1$. Ainsi, $x\mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a en outre :

$$\frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1+x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, $x\mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{1+x}$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale I_1 est bien définie. On calcule cette intégrale en utilisant les formules des primitives usuelles :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)-\ln(1) = \boxed{\ln(2)}$$

2. La fonction $x\mapsto\cos^2(x)$ est continue et ne s'annule pas sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, donc $x\mapsto\frac{1}{\cos^2(x)}$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. L'intégrale I_2 est donc bien définie. En outre, on a :

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = [\tan(x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-(-1) = \boxed{2}$$

3. La fonction $x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi, l'intégrale I_3 est bien définie. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variable suivant :

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \mapsto t = \cos(x) \in \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dans $\left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Le changement de variable $t = \cos(x)$ est donc bien défini, et on a :

$$dt = \frac{dt}{dx}dx = -\sin(x)dx.$$

Ainsi,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^2(x)dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -t^2 dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{4-\sqrt{2}}{12}}$$