# Dérivée objective : mythe ou réalité?

Organisateurs: T. Désoyer, N.Favrie, S. Gavrilyuk

27 Novembre 2014

## Résumé de la journée

Dès que des grandes déformations interviennent, les modèles de mécanique des solides font intervenir des dérivées dites objectives afin de garantir la "consistance" des modèles. Ces dérivées interviennent pour les équations d'évolution des contraintes pour les modèles dis hypoélastiques mais également pour la modélisation de l'écrouissage cinématique. De nombreuses dérivées objectives existent : Jaumann, Trusdell... Les résultats numériques obtenus dépendent fortement du choix de ces dérivées. Aucun critère de choix de ces dérivées n'est disponible pour l'utilisateur. Le but de cette journée d'étude est de discuter du bien fondé de cette approche et proposer une alternative  l'utilisation de ces dérivées.

## Programme

| | |
|---|---|
| 9h-9h30: | Accueil |
| 9h30-10h15: | Dérivées objectives - pourquoi ? Comment ?, **E. Rouhaud** |
| 10h30-11h15: | Les dérivées objectives sont-elles une solution ou un problème ?, **T. Désoyer** |
| 11h30-12h: | Pause |
| 12h-12h45: | La dérivée de Lie, **E. Rouhaud** |
| 13h-14h30: | Déjeuner |
| 14h30-15h15: | Where does come from the Wilkins model: study of a simple elasticity model at large deformations and description of its cell-centered lagrangian compatible discretization, **P.-H. Maire** |
| 15h30-16h15: | From hyperelastic models to well posed hypoelastic models, **N. Favrie** |
| 16h30-17h : | Discussion |

## Lieu

IUSTI, 5 Rue E.Fermi, 13453 Marseille

## Inscription

Pour des soucis d'organisation, nous limitons le nombre d'inscription  30 personnes. Vous êtes priés de vous inscrire auprès de Nicolas Favrie (nicolas.favrie@univ-amu.fr).

# Résumé des présentation

## Dérivées objectives - pourquoi ? Comment ?

**E. Rouhaud[‡], B. Panicaud[‡], R. Kerner[◇]**
[‡]Université de Technologie de Troyes
[◇]Université Pierre et Marie Curie

La description correcte des non-linééarités cinématiques lors des transformations finies d'un milieu continu est une nécessité pour accrocher un comportement réaliste. Il est alors classique d'imposer au modèle de comportement d'être “objectif”. Quand les modèles de comportement sont écrits sous une forme variationnelle (“rate form”), il est donc nécessaire de trouver des transports objectifs pour les tenseurs et en particulier pour le tenseur des contraintes. On peut définir une infinité de transports objectifs et le choix de ce transport est donc considéré comme un choix constitutif pour le modèle. Pourtant cette grandeur est sensée représenter une variation par rapport au temps du tenseur concerné, grandeur qui ne semble pas avoir une infinité de définitions différentes possibles...

Pour commencer, nous reviendrons sur les propriétés physiques que l'on souhaite modéliser dans le cadre des transformations finies, en particulier sur les propriétés d'indifférence: autrement dit, pourquoi vouloir définir des transports objectifs ?
Les outils mathématiques associés seront rappelés, en particulier, la notion d'espace vectoriel tangent, de système de coordonnées, de référentiels et de changements de coordonnées et de référentiels. Cela permettra de revenir sur cette notion d'objectivité et sur le vocabulaire associé. En effet, ce terme recouvre à la fois les propriétés d'indifférence par changement de référentiel et d'invariance par superposition avec un mouvement de corps rigide; suivant les auteurs, elle n'a pas toujours la même définition. Il s'agit de comprendre pourquoi la définition de transports objectifs reste ambige dans l'approche classique.
La géométrie différentielle dans le cadre d'un formalisme quadri-dimensionnel (4D) apporte des réponses cohérentes à ces difficultés, en particulier pour écrire les modèles de comportement. Cette approche garantie une description dite ”covariante” de la physique, c'est-à-dire valable pour tout référentiel. Les tenseurs 4D sont ainsi toujours covariants mais pas forcément indifférents par superposition de mouvement de corps rigide. Il est alors intéressant d'appliquer le principe de covariance à des transformations qui restent celles de la mécanique classique des milieux continus. On peut ainsi montrer que la plupart des transports objectifs classiques ne sont pas covariants et ne correspondent pas à une dérivée par rapport au temps. Ce formalisme apporte des réponses uniques sur le choix de la dérivée ”objective”, comparé à la multitude des choix possibles en 3D.
Nous répondrons donc finalement à la question : comment définir un transport objectif ? C'est en montrant que la dérivée de Lie est le seul transport covariant qui en outre corresponde à une dérivée par rapport au temps et qui soit indifférent à la superposition d'un mouvement de corps rigide.

# Les dérivées objectives sont-elles une solution ou un problème ?

**T.Désoyer**[‡]
[‡] LMA, Centrale Marseille, CNRS, UPR 7051, Aix-Marseille Univ., F-13451 Marseille, France,(thierry.desoyer@centrale-marseille.fr)

En mécanique des milieux continus solides en "transformations finies" (ou "grandes déformations"), les dérivées objectives semblent devenues incontournables. La très grande majorité des articles scientifiques où de telles transformations sont prises en compte, pour ne pas dire tous, font intervenir l'une ou l'autre de ces dérivées – et, bien souvent, sans que les auteurs ne cherchent à justifier leur choix. Quant aux logiciels de calculs par éléments finis, les uns imposent un couple (modèle de comportement, dérivée objective) – couple qui n'est d'ailleurs pas toujours le même dans les variantes explicite et implicite d'un logiciel donné –, quand les autres offrent une liste de dérivées objectives parmi lesquels l'utilisateur doit faire son choix – selon des critères le plus souvent non précisés et donc laissés à sa seule appréciation.

Au même titre que les équations traduisant les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus – et, pour un solide donné, celles définissant un modèle de comportement (thermo)mécanique, dont celles relatives à l'volution des variables d'tat interne –, une dérivée objective est donc désormais considérée comme un ingrédient indispensable à la définition d'un problème de mécanique des milieux continus solides en transformations finies. Autrement dit, la classique dérivée temporelle d'une quelconque grandeur objective non scalaire, parce qu'elle n'est pas objective, est systématiquement corrigée de façon à "l'objectiviser".

Cette procédure d'"objectivisation" a commencé à être présentée comme indispensable il y a une quarantaine d'années, notamment par Truesdell [1]. L'exposé visera à (tenter de) comprendre les raisons qui ont poussé cet auteur, puis tant d'autres, à faire des dérivées objectives une nécessité. On commencera par y rappeler rapidement quelques notions de base en physique classique, telles celles d'observateur, de changement d'observateur, de grandeur objective et de relation universelle. Bien qu'il s'agisse encore d'un rappel, le raisonnement qui prouve que la drive temporelle d'une grandeur objective non scalaire est nécessairement non objective sera ensuite présenté, essentiellement dans le but de bien préciser les causes et, surtout, les conséquences de ce résultat. Un exemple sera ensuite abordé et développé aussi loin que possible sans recourir à quelque simulation numérique que ce soit : celui d'un vecteur objectif unitaire dans un mouvement de milieu continu particulier. Deux autres exemples seront également présentés et commentés, qui reprendront les conclusions tirées du premier. On proposera enfin, sur la base de ces exemples, une réponse claire, sinon catégorique, à la question formulée dans le titre de l'exposé.

## References

[1] C. A. Truesdell : *A first course in rational continuum Mechanics - Volume 1*, 1st Edition, Academic Press, New-York, 1977 (ISBN 13: 9780127013015)

# La dérivée de Lie

**E. Rouhaud[‡], B. Panicaud[‡], R. Kerner[◇]**
[‡]Université de Technologie de Troyes
[◇]Université Pierre et Marie Curie

Dans un premier temps, nous revisiterons la notion de dérivée par rapport au temps pour un champ de tenseur. Avec l'aide d'Alice (au pays des merveilles), il est ensuite proposé d'explorer les différentes possibilités pour quantifier une variation d'une entité par rapport au temps. Ces considérations se veulent pédagogiques pour comprendre la notion de dérivée de Lie et comment elle se situe parmi les autres drivées par rapport au temps (dérivée droite et drivée totale).
La définition de la dérivée de Lie d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur deux fois covariant sera ensuite détaillée, de même que la dérivée de Lie d'un covecteur puis d'un tenseur deux fois contravariant. On expliquera pourquoi la dérivée de Lie d'un tenseur covariant n'a pas la même valeur que la dérivée de Lie de ce même tenseur exprimé sous une forme contravariante, même quand ces tenseurs sont exprimés dans un système cartésien de coordonnées.
Le lien entre la dérivée de Lie et les dérivées objectives dites convectives sera enfin détaillé. Il faudra pour cela définir les densités de tenseur et la notion de poids d'un tenseur.
Différents exemples seront traités, en particulier, le cas de la dérivée de Lie exprimée dans la configuration Lagrangienne. On peut aussi montrer que grâce à cet outil, le taux de déformation devient une dérivée par rapport au temps. L'utilisation de la dérivée de Lie pour écrire des modèles de comportement sera enfin évoquée.

# Where does come from the Wilkins model: study of a simple elasticity model at large leformations and description of its cell-centered lagrangian compatible discretization

**P.-H. Maire[‡], P. Le Tallec[◇]**
[‡]CEA/CESTA CS 60001 33116 Le Barp France (maire@celia.u-bordeaux1.fr)
[◇]Ecole Polytechnique France (patrick.letallec@polytechnique.fr)

**Keywords**: shock hydrodynamics; multi-material hydrodynamics; Lagrangian methods.

## ABSTRACT

Recently, in [3] has been proposed a cell-centered Finite Volume discretization of the so-called Wilkins hypoelastic model written under Lagrangian formalism [4]. In this framework, standard infinitesimal elastoplasticity models are extended to the finite strain range by formulating constitutive law in terms of frame invariant stress rates. In spite of its simplicity this approach arises two main difficulties. First, the definition of objective stress rates is somewhat arbitrary and not unique. It is well known that it is possible to construct many rates satisfying the principle of material frame indifference, such as the Jaumann, Oldroyd or Truesdell rates, refer to [2]. Further, this leads to an evolution equation for the deviatoric stress which cannot be written under conservative form for multi-dimensional flows. This flaw renders the mathematical analysis of discontinuous solutions such as shock waves questionable. Second, hypoelastic based models are characterized by a dissipative behavior within the elastic regime. In other words, reversible transformations of an elastic material are characterized by a non-zero rate of entropy. This shows that the Wilkins model is thermodynamically inconsistent. These difficulties have been already quoted by authors coming from the fluid mechanics community, refer for instance to [2]. Moreover, they render quite difficult the elaboration of cell-centered Lagrangian finite volume schemes whose construction relies explicitly on the use of the Second Law of Thermodynamics. Up to our knowledge, the traditional shock wave hydrocode community has not paid attention to these problems. It is certainly due to the fact that the Wilkins model is good enough for most engineering purposes for highly unsteady problems, if one turns material parameters to match experimental results. However, the issues related to the non uniqueness of the objective stress rate and the thermodynamical inconsistency are very troubling from both theoretical and numerical perspectives, particularly when one is dealing with flows containing shear and shock waves. On the other hand, the established computational mechanics community is careful about these issues but it typically does not deal with shock waves. In this talk, we start by recalling the flaws of the Wilkins models. Then, we intend to study carefully a simple elastic model at large deformations for an isothermal isotropic material. Firstly, this model is written under the undeformed configuration. The constitutive law is described for an hyperelastic isotropic material. Here, the second Piola Kirchhoff stress tensor is the derivative of a strain energy function which is decomposed into an isochoric and a volumetric part. In this manner, the model satisfies the principle of material frame indifference and is thermodynamically consistent. Secondly, we establish the transformation of the above model to write it under the deformed configuration. The closure of the constitutive law written under the deformed configuration requires to solve an evolution equation for the left Cauchy-Green tensor. We will also present the level of approximations which are required to recover a model similar to the Wilkins model. Finally, we present briefly a cell-centered Finite Volume discretization of this model which satisfies the Geometrical Conservation Law and a local entropy inequality.

## References

[1] N. Favrie, S.L. Gavrilyuk, R. Saurel "Modelling wave dynamics of compressible elastic materials", *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 2941–2969, 2008.

[2] M.E. Gurtin, E. Fried, L. Anand "The mechanics and thermodynamics of continua", Cambridge University Press, 2010.

[3] P.-H. Maire, R. Abgrall, J. Breil, R. Loubère and B. Rebourcet "A nominally second-order cell-centered Lagrangian scheme for simulating elastic-plastic flows on two-dimensional unstructured grids", *Journal of Computational Physics*, 235, pp. 626–665, 2013.

[4] M.L. Wilkins "Methods in Computational Physics, volume 3, chapter Calculation of Elastic-Plastic Flow", *Academic Press*, 1964.

# From hyperelastic models to well posed hypoelastic models

**N. Favrie[‡]S. Gavrilyuk[◇]**
[‡]IUSTI, Aix Marseille University, 5 Rue E. Fermi 13453 Marseille cedex 13
(nicolas.favrie@univ-amu.fr)
[◇]IUSTI, Aix Marseille University, 5 Rue E. Fermi 13453 Marseille cedex 13
(sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr)

**Keywords**: Hyperelastic model, hypoelastic model

**ABSTRACT**

In the literature, two classes of models for a high strain dynamics of solids can be found : hypoelastic and hyperelastic ones. Hypoelastic models [1] are widely used in industrial and military numerical codes (LS-Dyna, CTH (USA), OURANOS (France), EGIDA (Russia), ... ). For this class of models an empirical partial differential equation for the deviatoric part of the stress tensor is formulated to closure the governing equations. The deviatoric stress rate depends on the choice of so called *objective derivative*. These hypoelastic models presents two main drawbacks :

- in absence of dissipation, the entropy is not in general conserved for continuous motions [2],[3]
- the choice of the objective derivative is not unique and thus the obtained results will strongly depend on such a choice [4].

Hyperelastic models have been intensively studied in the last decades. In these models the stress tensor is obtained by variation of the internal energy. The models are conservative and hyperbolic if the internal energy is rank-one convex. A simple criterion of hyperbolicity is given for a large class of equations of state in [5]. An extension of this class of models can be given when viscoplastic effects are present. Also, a multiphase formulation of hyperelasticity allowing us to model solid-fluid interaction can be given. When the dissipation is added, these models verify the second law of thermodynamics. In general, the hyperelastic models have better mathematical and numerical properties.

In this talk, we propose to link between hypoelastic and hyperelastic models. This link is in some sense obvious and related to the problem of inversion of stress - strain relation [6]. However, an explicit inversion is needed for practical applications. We give in this note an explicit example of a non-linear equation of state where such an inversion is performed. In a particular case of small deformations, we obtain Hooke's law. A natural *objective derivative* appears associated with such a law. First, we will present the hyperelastic model with a general equation of state. Then we will justify the mathematical properties of the model. Some examples of application of such an approach will be presented. Finally, for a particular choice of EOS, the derivation of a hypoelastic model will be given.

## References

[1] M.L. Wilkins "Methods in Computational Physics, volume 3, chapter Calculation of Elastic-Plastic Flow", *Academic Press*, 1964.

[2] S.L. Gavrilyuk, N. Favrie,, R. Saurel "Modelling wave dynamics of compressible elastic materials", *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 2941–2969, 2008.

[3] Maire, P.-H., Abgrall, R., Breil, J., Loubère, R. and Rebourcet, B. (2013) A nominally second-order cell-centered Lagrangian scheme for simulating elastic–plastic flows on two-dimensional unstructured grids, J. Comp. Physics, Volume 235, Pages 626–665.

[4] Szabo, L., and Balla, M. (1989). Comparison of some stress rates. International journal of solids and structures, 25(3), 279-297.

[5] Ndanou, S., Favrie, N. and Gavrilyuk, S. (2013). Criterion of hyperbolicity in hyperelasticity in the case of the stored energy in separable form. Journal of Elasticity, 1-25.

[6] Romenskii, E.I, (1974) Hypoelastic form of equations in nonlinear elasticity theory, Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnieheskoi Fiziki, No. 2, pp. 133-138