Université d'Aix–Marseille **Licence mathématiques et informatique**

Analyse 1
Deuxième devoir sur table : 18 mars 2016
Durée : deux heures

Veuillez rédiger avec soin, **en formant des phrases et en évitant les symboles abbréviateurs mal compris,** des solutions aux exercices suivants. La qualité de rédaction sera prise en compte dans la note finale. Les documents écrits ainsi que les calculettes, téléphones portables et autres ustensiles électroniques sont interdits.

Exercice 1 (Questions de cours.)

On note I l'intervalle $]0,+\infty[$; dans cet exercice f et g sont deux fonctions définies sur I.

1. [1 pt] Écrire formellement l'énoncé suivant : « La fonction f ne tend pas vers 1 en 0 ».

Réponse. Ceci s'écrit mathématiquement :

$$\exists\varepsilon > 0,\, \forall\eta > 0,\, \exists x \in I,\, x \in [-\eta, \eta] \wedge |f(x) - 1| > \varepsilon.$$

2. [1 pt] Écrire formellement que f tend vers 0 en l'infini.

Réponse. Cela signifie :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists A > 0,\, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon.$$

3. [1 pt] Écrire formellement que g tend vers 0 en 0 à droite.

Réponse. Par application de la définition, cela s'écrit :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\eta > 0, \forall x \in I, x \in [0, \eta] \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

Etant donné que $I =]0, +\infty[$, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\eta > 0, \forall x \in I, x \leq \eta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

4. [2 pt] On suppose que $g(x) = f(1/x)$; montrer que si f tend vers 0 en l'infini alors g tend vers 0 en 0 à droite.

Réponse.

On veut montrer que :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\eta > 0, \forall x \in I, x \leq \eta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

On sait que f tend vers 0 en l'infini. Ainsi :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists A > 0,\, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $A > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose maintenant $\eta = 1/A$. On a alors :

$$\forall x \in I, \frac{1}{x} \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon,$$

ou encore :

$$\forall x \in I, x \leq \eta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

Résumons : on s'est fixé $\varepsilon > 0$ quelconque, et on a trouvé $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, x \leq \eta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\eta > 0,\, \forall x \in I, x \leq \eta \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon.$$

5. [1 pt] Rappeler la définition de « f est continue en $x_0 \in I$ ».

Réponse. Par définition, cela s'écrit :

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists\eta > 0,\, \forall x \in I,\, x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

6. [2 pt] On suppose que f est continue en 1 et que $f(1) = 1$; montrer qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$ on a $f(x) \neq 0$.

Réponse. La fonction f est continue en 1, donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\Rightarrow |f(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

On pose donc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et on pose α un réel positif tel que :

$$\forall x \in I,\ x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[\Rightarrow |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, si $x \in I$ et vérifie $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$ alors $f(x) \in [1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$. Ceci implique donc que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$, $f(x) \geq 1/2$ et en particulier, $f(x) \neq 0$.

On a donc trouvé un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$, $f(x) \neq 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. [1 pt] Justifier que f est continue sur $]0, 1]$.

Réponse. Les fonctions sin et $x \to \frac{1}{x}$ sont continues sur $]0, 1]$, donc la fonction f est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues sur $]0, 1]$.

2. [2 pt] Montrer que f n'est pas continue en 0.

Réponse. Pour montrer que f n'est pas continue en 0, on peut montrer que la phrase suivante est fausse : $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. En particulier, nous allons montrer que f n'admet pas de limite en 0 en utilisant le critère séquentiel de la continuité.

Définissons deux suites : $(u_n) = (\frac{1}{2n\pi})$ et $(v_n) = (\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}})$. Pour tout entier non nul n, $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$. Ainsi, (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent vers 0 et les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne convergent pas vers la même limite. Donc le critère séquentiel de la limite n'est pas respecté, ainsi, la fonction f n'admet pas de limite en 0.

On définit g sur $[0, 1]$ par $g(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3. [2 pt] Montrer que g est continue en 0.

Réponse. Pour montrer que g est continue en 0, nous allons montrer que $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque), posons $\alpha = \varepsilon$. Pour tout $x \in [0, 1]$ tel que $|x| \leq \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} &|g(x)| \leq |x|, \text{ car la fonction sinus est majorée par 1, donc :} \\ &|g(x)| \leq \alpha = \varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien montré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [0, 1],\ |x| \leq \alpha \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que la fonction g a pour limite $0 = g(0)$ en $x = 0$.

Exercice 3

1. [2 pt] Soit y_1 et y_2 tels que $y_1 \leq y_2$, et $\alpha \in [0, 1]$. Montrer que $y_1 \leq \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \leq y_2$.

Réponse. On a la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_1 \\ &\leq \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2, \text{ car } y_1 \leq y_2 \text{ et } 1 - \alpha \geq 0, \\ &\leq \alpha y_2 + (1 - \alpha)y_2, \text{ (pour les mêmes raisons)} \\ &= y_2 \end{aligned}$$

2. [2 pt] Soit $a \leq b$ deux réels, f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in [0, 1]$. On suppose que $f(a) \leq f(b)$; montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)$.

Réponse. Posons $y = \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)$. D'après la question précédente :

$$f(a) \leq y \leq f(b).$$

La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Exercice 4

1. [2 pt] Soit h une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et telle que $h(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$; justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $h(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Réponse. La fonction h est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle atteint son minimum en un point $c \in [0, 1]$:

$$\forall x \in [0, 1],\ h(c) \leq h(x).$$

Posons $\alpha = h(c)$. Puisque la fonction h vérifie : $\forall x \in [0, 1],\ h(x) > 0$, on a : $\alpha > 0$. On a donc justifié l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1],\ h(x) \geq \alpha.$$

2. [1 pt] Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) < g(x)$; montrer que alors il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) + m \leq g(x)$.

Réponse. Posons la fonction $h = g - f$. D'après l'énoncé, $\forall x \in [0, 1],\ h(x) > 0$. D'après la question précédente, il existe $m > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1],\ h(x) \geq m.$$

Ceci signifie :

$$\forall x \in [0, 1],\ g(x) \geq m + f(x).$$