Université d'Aix–Marseille **Licence mathématiques et informatique**

Analyse 1
Deuxième devoir sur table : 18 mars 2016
Durée : deux heures

Veuillez rédiger avec soin, **en formant des phrases et en évitant les symboles abbréviateurs mal compris,** des solutions aux exercices suivants. La qualité de rédaction sera prise en compte dans la note finale. Les documents écrits ainsi que les calculettes, téléphones portables et autres ustensiles électroniques sont interdits.

Exercice 1 (Questions de cours.)

On note I l'intervalle $]0, +\infty[$; dans cet exercice f et g sont deux fonctions définies sur I.

1. Écrire formellement l'énoncé suivant : « La fonction f ne tend pas vers 1 en 0 ».
2. Écrire formellement que f tend vers 0 en l'infini.
3. Écrire formellement que g tend vers 0 en 0 à droite.
4. On suppose que $g(x) = f(1/x)$; montrer que si f tend vers 0 en l'infini alors g tend vers 0 en 0 à droite.
5. Rappeler la définition de « f est continue en $x_0 \in I$ ».
6. On suppose que f est continue en 1 et que $f(1) = 1$; montrer qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$ on a $f(x) \neq 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est continue sur $]0, 1]$.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

On définit g sur $[0, 1]$ par $g(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3. Montrer que g est continue en 0.

Exercice 3

1. Soit y_1 et y_2 tels que $y_1 \leq y_2$, et $\alpha \in [0, 1]$. Montrer que $y_1 \leq \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \leq y_2$.
2. Soit $a \leq b$ deux réels, f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in [0, 1]$. On suppose que $f(a) \leq f(b)$; montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)$.

Exercice 4

1. Soit h une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et telle que $h(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$; justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $h(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) < g(x)$; montrer que alors il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) + m \leq g(x)$.