Année universitaire 2017/2018

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique

Code du module : Libellé du module : Analyse 1

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
   (a) Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion : l'application f est continue en x_0.
   (b) On suppose que $I = [0, 2]$ et que f est définie par $f(x) = \sqrt{x+3}$, $\forall x \in I$. À l'aide de la définition de la continuité donnée à la question précédente, montrer que f est continue en $x_0 = 1$.
2. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $k(2) < 0$. En utilisant la définition de la continuité donnée en 1.(a), montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $k(x) < 0$.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une application. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Grâce à cette définition, montrer que

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{-x^3 + 8x - 3}{|x| - 3}.$$

1. Étudier l'existence d'une limite de l'application f en -3.
2. L'application f est-elle prolongeable par continuité en $x = -3$? Si oui, donner la définition de son prolongement.

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction g en 0.

Exercice 5.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Montrer que l'équation $\cos(2x) - 2\sin(x) + 2 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 6.

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue et strictement positive et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers 0.
2. Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. En utilisant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{2}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction g n'admet pas de limite en 0.