Aix-Marseille Université 2016-2017

Analyse I

PLANCHE 3 : DÉRIVATION - DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dérivabilité, dérivée,

Exercice 1 [Opérations sur les dérivées] ♣
Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f + g)$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 2 [Dérivabilité de $x \mapsto x^n$] ♣
Soit n un entier relatif. On considère la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f_n (distinguer suivant les valeurs de n).
2. Montrer que f_n est dérivable sur D et déterminer sa dérivée.

Exercice 3 [Calcul de dérivées] ♣
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\ln(x)$, $f_2(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$, $f_4(x) = \left(\ln(\frac{1+x}{1-x})\right)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$ et $f_6(x) = \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x)$.
2. On note $\Delta(f) = \frac{f''}{f}$. Calculer $\Delta(f \times g)$.
3. Soit $f :]1, +\infty[\to] - 1, +\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection . Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1 + x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = x^3 \ln(x)$.

Exercice 4 [Dérivabilité de $x \mapsto x^{1/n}$] ♣
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $g_n(x) = x^{1/n}$. Rappelons que g est par définition la fonction réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que le graphe de g_n admet une demi-tangente verticale en 0.

Exercice 5 ♣
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \exp(f(x)) \ , \quad f_2 : x \mapsto (f(\sin x))^2 \ , \quad f_3 : x \mapsto \ln|f(x)| \ , \quad f_4 : x \mapsto f(\ln|f(x)|).$$

Exercice 6 ♣
Soit $f\colon x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On admettra l'existence d'une fonction $\ln$ (logarithme népérien) définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, s'annulant en 1 et vérifiant $\ln' = f$.

1. Montrer que la fonction $\ln$ est ainsi définie de manière unique.
2. Montrer que $\ln$ est strictement croissante.
3. a. Soit $a > 0$ et $g_a\colon R_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = \ln(ax) - \ln(a)$. Montrer que g_a est dérivable et calculer g_a' et $g_a(1)$.
   b. En déduire que pour tout $a, b > 0, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
4. Montrer, en étudiant une fonction bien choisie, que pour tout $x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 7 [Dérivée non continue] ♣
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 8 ♣
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 9 [Exercice de rédaction] ♣
Soit φ une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0, +\infty[$) et t.q. $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.
2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Applications de la dérivée : Rolle, Accroissements finis, extrema locaux, convexité

Exercice 10 [Application du théorème de Rolle] ♣

1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant : f admet deux minimum locaux et un maximum local ; h admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global ; k admet une infinité d'extremum locaux ; l n 'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.
3. Soit $f : [0; 2] \to \mathbb{R}$. une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe c, d tels que $f'(c) = f'(d) = 0$. Montrer qu'il existe e tel que $f''(e) = 0$.
4. Montrer que chacune des 3 hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

Exercice 11 [Extremum local] ♣
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |1 - x^2|$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais n'est pas dérivable en -1 et en 1.
2. Montrer que f admet un maximum local en 0 et des minima locaux en -1 et en 1.

Exercice 12 ♣
Soit I un intervalle ouvert et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit k un entier ≥ 2. On suppose qu'il existe k nombres réels distincts appartenant à I en lesquels f s'annule. Démontrer qu'il existe au moins $k - 1$ nombres réels distincts appartenant à I en lesquels f' s'annule.

Exercice 13 ♣

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a la double inégalité :

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$$

3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Exercice 14 [Application des accroissement finis] ♣

1. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un extremum local.
2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle [100 ;101). En déduire l'encadrement : $10+\frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théoème des accroissement finis pour montrer que $\ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout x strictement positif.
4. Soit $h : x \mapsto e^x$. Que donne l'inégalité des accroissement finis sur $[0; x]$?

Exercice 15 [Application règle de l'Hôpital (ou règle de Bernoulli)] ♣

Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers 0

$$f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n - 1}, \qquad g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \quad h : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Exercice 16 [Etude d'une fonction] ♣

Soit $a > 0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{a}{|x|}\right)^x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)
   (a) Montrer que $e^z \geq 1 + \dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.
   En déduire que $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.
   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.
   (c) Montrer que $\lim_{x \to 0, x>0} f(x) = 1$.
   (d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]
2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 9.] Montrer que f est strictement croissante.
3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse. . .)

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

   Dans la suite, on note l et m ces limites.

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1 + h)$ et $g(1)$.]

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 [Fonction convexe] ♣
Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que φ est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$) et que φ' est une fonction croissante.

1. Soit $x < z < y$. Montrer que $\dfrac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \dfrac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.

2. Montrer que φ est convexe, c'est-à-dire que

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0, 1]. \tag{0.0.1}$$

   [Pour $x < y$ et $t \in]0, 1[$, on pourra utiliser la question 1 avec $z = tx + (1 - t)y$.]

3. On définit ici la fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est convexe. La fonction ψ est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

Formules de Taylor, équivalents, développements limités

Exercice 18 [Application formule de Taylor] ♣

1. Ecrire les trois formules de Taylor en 0 pour $x \mapsto \cos(x),\ x \mapsto \exp(-x)\ et\ x \mapsto sh(x)$.
2. Ecrire les formules de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ et\ x \mapsto \tan(x)$.
3. Ecrire les formules de Taylor en 1 à l'ordre 2 pour $f : x \mapsto x^3 - 9x^{1/2} + 14x + 3$.
4. Avec une formule de Tayor à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ trouver une approximation de $\sqrt{1.01}$.
   Même question avec $\ln(0.99)$ (pour cela on pourra calculer le DL en 0 de $h : x \mapsto \ln(1 - x)$).

Exercice 19 [Limites] ♣

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x, \quad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$$

2. Calculer

$$l = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x + 1}{x}\right)^x.$$

   Donner un équivalent de $l - \left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 20 [Un peu d'analyse numérique] ♣
Donner une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-6}-près, c'est-à-dire donner un nombre réel l tel que $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$. [On pourra considérer la fonction sinus sur $[0, 1]$ et écrire la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]

Exercice 21 [DL, exemple 1] ♣
On définit f sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 22 [DL, exemple 2] ♣

1. Calculer le DL en 0 de $x \mapsto \text{ch}(x)$ en utilisant TY. Retrouver ce DL en utilisant $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$. Même question avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.
3. Écrire le DL en 2 à l'ordre 2 de $h : x \mapsto \sqrt{x}$.
4. Justifier l'expression du DL de $k : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ à l'aide de l'unicité du DL et de la somme d'une suite géométrique.

Exercice 23 [DL d'un polynôme...] ♣
Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 24 [DL somme, opérations] ♣

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_1 : x \mapsto \exp(x) - \frac{1}{1+x}$, puis de $g_1 : x \mapsto x\cos(2x)$ et $h_1 : x \mapsto \cos(x) \times \sin(2x)$.
2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_2 : x \mapsto \sqrt{1 + 2\cos(x)}$, puis de $g_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1 + 2\cos(x)})$.
3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_3 : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$. Même question à l'ordre 6 pour $g_3 : x \mapsto (\ln(1 + x^2))^2$.
4. Calculer le DL en 0 à l'ordre n de $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}$. Même question à l'ordre 3 pour $g_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.
5. Par intégration retrouver la formule du DL de $f_5 : x \mapsto \ln(1 + x)$. Même question à l'ordre 3 pour $g_5 : x \mapsto \arccos(x)$.

Exercice 25 [Utilisation des $DL(1)$] ♣
Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 26 [Utilisation des $DL(2)$] ♣

1. Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\sin(x) - x}{x}$.
2. Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1. Même question avec $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$, puis $\dfrac{1}{\tan^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.
3. Soit $f : x \mapsto \exp(x) + \text{sh}(x)$. Calculer l'équation de la tangente en $x = 0$ et étudier la position du graphe de f par rapport à cette tangente. Même question avec $g(x) = \text{sh}(x)$.
4. Calculer le DL en +∞ à l'ordre 5 de $h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Même question à l'ordre 2 pour $\varphi : x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$.
5. Soit $k : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$. Déterminer une équation de l'asymptote de k en +∞ et la position du graphe par rapport à cette asymptote.

Exercice 27 [DL d'une fonction réciproque] ♣
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

Exercice 28 [Equivalents] ♣

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f + g) \sim (\lambda + \mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f + g) \sim h$ en 0.

Exercice 29 [Equivalents] ♣
Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 30 [Etude d'une fonction (1)] ♣
Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + \tan x)}{\sin x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 31 [Etude d'une fonction (2)] ♣
On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\cos(x)}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement croissante.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement.
   Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.
5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.
6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.
7. Montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

Exercice 32 [Etude de $\ln(1-x)/x$] ♣

1. Montrer que pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre n en zéro. Calculer explicitement ce développement pour $n = 2$.
2. Soit $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Montrer que g se prolonge par continuité en zéro (à droite).

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,1[$.
4. Montrer que f est dérivable à droite en zéro et donner la valeur de cette dérivée (notée $f'(0)$).
5. Calculer la fonction dérivée f' sur $]0,1[$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?
6. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$.
7. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe sur $[0,1[$ (on pensera à calculer la limite de f en 1).

Exercices Supplémentaires

Exercice 33 [Limite à l'infini]
Soit f une fonction dérivable de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 34 [Fonctions höldériennes]
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y-x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En déduire que f est constante.
3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \geq |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

Exercice 35
Soit n un entier ≥ 2, a et b des nombres réels et P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^n + aX + b$.

1. Combien le polynôme P' a-t-il de racines réelles ?
2. Montrer que le polynôme P a au plus deux racines réeles si n est pair et au plus trois racines réelles si n est impair.

Exercice 36 [Utilisation du théorème des accroissements finis]
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
2. On suppose maintenant que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note g la fonction réciproque de f [l'existence de la function g a été vue en cours]. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

Exercice 37 [Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité]
Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 38 [Limite en 0]
Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right),\ g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x},\ h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 39 [$DL3$]
Calculer le $DL3$ en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.

Calculer le $DL3$ en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 40 [$DL4$]
Donner le $DL4$ en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 41 [DLn]
On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) = 1 \end{array} \tag{0.0.2}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 42 [Développement limité curieux]
On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) & = & 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $u > 0$, $e^u \geq \dfrac{u^q}{q!}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer, en utilisant la question précédente, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$. En déduire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 et donner ce développement.

Exercice 43 [Etude de la fonction $x \mapsto x \arctan x$]
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \arctan x,\ x \in \mathbb{R}.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Etudier les asymptotes.]

Exercice 44 [Limite en $+\infty$]
Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. (On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.)