Chapitre 1 : Applications

Caroline Bauzet*

Table des matières

1 Quelques notions de logique

Définition 1 *Une assertion ou proposition mathématique est une phrase qui est soit vraie, soit fausse mais pas les deux en même temps.*

Exemples 2
. « $0 < 4$ » *est une assertion qui est vraie.*
. *« L'exponentielle est une fonction décroissante » est une assertion qui est fausse.*
. *« Le triangle ABC » n'est pas une assertion mathématique.*
. *« La somme des angles du triangle ABC vaut $180\,^\circ$» est une assertion mathématique qui est vraie.*

Définition 3 *Soit P une assertion mathématique. On appelle négation de P l'assertion qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie. On la note non(P) ou encore $\overline{P}$.*

Exemples 4 *1. Si P est l'assertion « $1 < 4$ », alors l'assertion non(P) est « .... »*

2. Si R est l'assertion « $1 \geqslant 3$ », alors l'assertion non(R) est « .... »

Si P et Q sont deux assertions, il est possible de créer de nouvelles assertions à partir de celles-ci en utilisant des connecteurs logiques.

Définitions 5 *Soient P et Q deux assertions. On définit les connecteurs logiques suivants*
— *Le connecteur* ***implication*** *noté « $\Rightarrow$ » permet de créer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » qui se lit « P implique Q » et qui signifie que si P est vraie alors Q est forcément vraie aussi.*

*. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

— *Le connecteur **équivalence** noté « $\Leftrightarrow$ » permet de créer l'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » qui se lit « P est équivalente à Q » et qui signifie que P implique Q **et que** Q implique P.*

Remarque 6 *Si l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition **suffisante** pour que Q soit vraie et que Q est une condition **nécessaire** pour que P soit vraie.*

Exemples 7 *1. L'assertion « $2 \leqslant 3 \Rightarrow 2^2 \leqslant 3^2$ » est-elle vraie ?* ....

....

*2. Notons P l'assertion « $2 \leqslant 4$ » et **Q** l'assertion « $4 \leqslant 16$ ». L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est elle vraie ?*

Pour qu'elle le soit, il faut que .... et que .... soient vraies.

• *$P \Rightarrow Q$ est vraie car si $2 \leqslant 4$ alors $2^2 \leqslant 4^2$ par .... de la fonction ....*

sur .... ce qui donne bien $4 \leqslant 16$.

• *$Q \Rightarrow P$ est aussi vraie, il suffit d'utiliser la .... de la fonction ....*

.... sur .... : si $4 \leqslant 16$ alors $\sqrt{4} \leqslant \sqrt{16}$ c'est à dire $2 \leqslant 4$.

***Conclusion :** comme les assertions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies, on en déduit que $P \Leftrightarrow Q$.*

Une expression mathématique peut dépendre d'une variable x appartenant à un ensemble donné noté E (par exemple $E = \mathbb{R}$, ou $[0,1]$, ou $\mathbb{N}$...), notons la P_x. Par exemple, l'inégalité P_x donnée par :

$$\ln(x) \geqslant 0$$

est vraie pour tout $x \in$ .... et fausse pour $x \in$ .... Si P_x est une expression dépendant d'une variable x ($x \in E$), trois cas peuvent se présenter :

1. L'expression P_x est vérifiée pour tout $x \in E$. On note alors ....
   Le quantificateur $\forall$ se lit « pour tout ».

2. L'expression P_x est vérifiée pour au moins un $x \in E$. On note alors ....
   Le quantificateur $\exists$ se lit « il existe ». Le symbole « : » est utilisé pour dire « tel que » (on pourra aussi rencontrer la notation slash « / » à la place des « : »).

3. L'expression P_x n'est vraie pour aucune valeur de $x \in E$. On ne définit pas de nouveau quantificateur, car on peut remarquer que cela signifie que l'expression non(P_x) est vérifiée pour tout $x \in E$. On a dans ce cas : ....

Notation : On utilise parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie : il existe un unique. L'écriture

$$\exists! x \in E : \ P_x$$

veut donc dire que la assertion P_x est vraie pour un **unique** $x \in E$.

Remarques 8 *(Ordre des quantificateurs)*
Il est possible de combiner des quantificateurs pour créer de nouvelles assertions : notons P l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$$

P signifie que pour n'importe quel réel x, il existe (au moins) un réel y tel que la somme $x + y$ soit strictement positive. Dans cette assertion, le y peut tout à fait dépendre de x car il est introduit après x. Cette assertion est .... car . . . .

. . . .

. . . .

Attention : *l'ordre des quantificateurs est important : notons **Q** l'assertion suivante :*

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0.$$

*Les assertions P et **Q** sont différentes : P est vraie alors que **Q** est fausse car il faudrait trouver un réel y tel que pour tout réel x la somme $x + y$ soit positive. En particulier, on voit que pour $x = -y - 1$, on a $x + y = -y - 1 + y = -1 < 0$ quelle que soit la valeur de y.*

Exemples 9 *Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :*

1. La fonction cosinus est minorée par -1 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$: . . . .

2. L'équation $\ln(x) = 1$ a une seule solution strictement positive : . . . .

Exemples 10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la négation des assertions suivantes :*

A $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 3$.
B $\Leftrightarrow$ $\exists x \in \mathbb{R}^- : f(x) \leqslant 1$.
C $\Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.
D $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
E $\Leftrightarrow$ *L'application f est croissante.*
F $\Leftrightarrow$ *L'application f est croissante et positive.*
G $\Leftrightarrow$ *Il existe un réel x tel que pour tout réel y, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.*
H $\Leftrightarrow$ *Tout réel positif est compris entre deux entiers naturels consécutifs.*

On a :

non$(A) \Leftrightarrow$ . . . .

non$(B) \Leftrightarrow$ . . . .

non$(C) \Leftrightarrow$ . . . .

non$(D) \Leftrightarrow$ . . . .

E $\Leftrightarrow$ . . . .

non$(E) \Leftrightarrow$ ....

F $\Leftrightarrow$ ....

non$(F) \Leftrightarrow$ ....

....

G $\Leftrightarrow$ ....

non$(G) \Leftrightarrow$ ....

H $\Leftrightarrow$ ....

non$(H) \Leftrightarrow$ ....

....

Remarque 11 *(Négation $\exists!$) Le symbole « $\exists!$ » signifie qu'il y a existence et unicité. Sa négation donne donc non existence ou non unicité.*

Exemples 12
On note P l'assertion « $\exists! x \in \mathbb{R} : e^x = 1$ ». P signifie que l'équation $e^x = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Ecrivons la négation de P :

Existence d'une solution : ....

Non existence d'une solution : ....

Unicité de la solution : ....

....

....

....

Non unicité de la solution : ....

....

....

....

non(P) $\Leftrightarrow$ ....

2 Notations d'ensemble

2.1 Les ensembles

Définition 13 *Un ensemble est une collection d'objets qui est caractérisé par les éléments qu'il contient. On notera en majuscule les ensembles (ex : A, E, F, ...) et en minuscule les éléments (ex : x, y, a, b, ...).*

Exemples 14 $E = \{1, 2, 5\}$ *et* $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\}$ *sont des ensembles..* ....

....

Définitions 15 *(Ensembles particuliers)*

• *On appelle* ***ensemble vide*** *l'ensemble qui ne contient aucun élément et on le note ....*

• *On appelle* ***singleton*** *un ensemble qui contient un seul élément* a *et on le note ....*

On considère E, F deux ensembles. On manipulera dans ce qui suit les notions suivantes :

— **L'inclusion** : on dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F.

Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on a $A \subset B \Leftrightarrow$ ....

— **L'égalité** : on dit que les ensembles E et F sont égaux si et seulement si E est inclus dans F et F est inclus dans E :

$$E = F \Leftrightarrow \text{.......................................}$$

— **Ensemble des parties de E :** on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$,

$\mathcal{P}(E) =$ ....

L'ensemble E contient .... éléments, ... est appelé le .... de E et est noté card(E).

Remarque : quel que soit l'ensemble E considéré, $\mathcal{P}(E)$ contient toujours au moins deux éléments : $\varnothing$ et E.

Soient A et B deux parties de E.

— **Le complémentaire** : On définit le complémentaire de A par

$$A^c = \text{..}$$

Autres notations : $E \setminus A$, ou $\overline{A}$.

Si $A \subset B$, on définit le complémentaire de A dans B par

$\complement_B A =$ ...., aussi noté $B \setminus A$.

— **L'union** :

$$A \cup B = \text{..}$$

Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B.

— **L'intersection** :

$$A \cap B = \text{..}$$

— **Le produit cartésien** :

$$A \times B = \text{..}$$

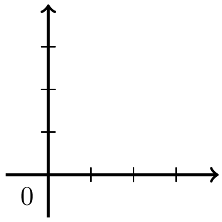
Exemples 16 *On considère* $A = \{1,2\}$ *et* $B = \{1,2,3,4\}$ *deux sous-ensembles de* $C = \{1,2,3,4,5\}$. *Déterminer* $A^c, B^c, B \setminus A, A \cup B, A \cap B$ *et* $A \times B$.

....

....

....

Soient $F = [0,1]$ *et* $D = [1,2]$. *Représenter graphiquement* $F \times D$.



2.2 Opérations sur les ensembles

Proposition 17 *(Règles de calculs)*
Soient A, B *et* C *des ensembles. On a*

- $A \cap \varnothing =$ ...., $A \cap A =$ ....
- $A \cup \varnothing =$ ...., $A \cup A =$ ....
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) =$ ....
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cup C) =$ ....
- $A \cup (B \cap C) =$ ....

Proposition 18 *(Relations remarquables)*
*Soient **A,B,E** trois ensembles avec* $A, B \subset E$. *On a :*

- $A \subset$ .... *et* $B \subset$ ....
- $A \cap B \subset$ .... *et* $A \cap B \subset$ ....
- $A \subset B \Leftrightarrow$ ....
- $(A \cup B)^c =$ ....
- $(A \cap B)^c =$ ....
- $(A^c)^c =$ ....

Preuve. Montrons que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Considérons $x \in E$, on a

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 19 *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ *possède les sous-ensembles suivants :*

. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, *et* $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.
. $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ *et* $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.
. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *l'ensemble des entiers naturels.*
. $\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ *l'ensemble des entiers relatifs.*
. $\mathbb{Q} = \left\{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \right\}$ *l'ensemble des rationnels.*
. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *l'ensemble des irrationnels.*

Remarque 20 ....

Notation : $\overline{\mathbb{R}}$ = ... = ... Il s'agit d'une <u>notation</u> qui permet de raccourcir des écritures du type

« $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$ » qui s'écrit alors de façon plus concise $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 21 $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} a \times b = 0 & \Leftrightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a < b & \Leftrightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a) & \Leftrightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) & \Rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) & \Rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) & \Rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) & \Rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Proposition 22 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* a *et* b *sont* <u>*de même signe*</u> *alors on a :*

$$a^2 = b^2 \;\dots\dots\; a = b.$$

Proposition 23 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Si* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *alors* $a \leqslant b$ .... $a^2 \leqslant b^2$.
- *Si* $a, b \in \mathbb{R}_-$ *alors* $a \leqslant b$ .... $a^2 \geqslant b^2$.
- *Si* $a \in \mathbb{R}_-$ *et* $b \in \mathbb{R}_+$ *alors* a .... $\sqrt{b}$.
- *Si* $a \in \mathbb{R}_+$ *et* $b \in \mathbb{R}_+$ *alors* $a \leqslant \sqrt{b}$ .... $a^2 \leqslant b$.

Exemples 24 *Attention, les conditions sur les signes énoncées dans les résultats précédents sont indispensables.*

1. *En effet, les équivalences suivantes sont fausses :*

$$(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow -3 = 3, \text{ ce qui est absurde !}$$

$$-3 < 2 \Leftrightarrow (-3)^2 \leqslant 2^2 \Leftrightarrow 9 \leqslant 4, \text{ ce qui est absurde !}$$

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $x+1 \leqslant \sqrt{x^2+1} \quad (\star)$.

   Notons tout d'abord que chaque terme de cette inéquation est bien défini car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 \geqslant 0$ *et donc la racine existe toujours.*
   • *Si* $x+1<0$, *alors* $(\star)$ *est toujours vérifiée et on trouve comme premier ensemble de solutions*

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x+1<0\} =]-\infty, -1[.$$

   • *Si* $x+1 \geqslant 0$, *alors* $(\star) \Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant (\sqrt{x^2+1})^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leqslant x^2+1 \Leftrightarrow 2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. *On trouve comme deuxième ensemble de solutions*

$$S_2 =]-\infty, 0] \cap [-1, +\infty[= [-1, 0].$$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $(\star)$ *est* $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -1[\cup [-1, 0] =]-\infty, 0]$.

3. *Résoudre sur* $[-1, +\infty[$ *l'équation* $2x+1 = \sqrt{x+1} \quad (\star\star)$. . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définitions 25 *Le* ***maximum*** *de deux réels* a *et* b *noté* $\max(a,b)$ *est défini de la façon suivante*

$$\max(a,b) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le ***minimum*** *de deux réels* a *et* b *noté* $\min(a,b)$ *est défini de la façon suivante*

$$\min(a,b) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Remarque 26 *Soient* a, b *deux réels donnés. On a les propriétés suivantes :*

1. . . . .
2. . . . .

3 Applications

Dans toute la suite, on considère deux ensembles quelconques E et F.

3.1 Définitions

Définition 27 *Une* ***application*** *(ou fonction) c'est la donnée de trois choses :*

1. . . . .
2. . . . .
3. . . . .

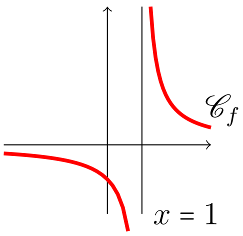
   . . . .

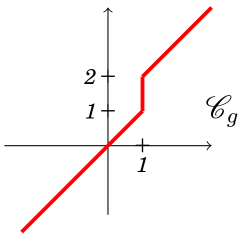
Notation Une application f sera notée

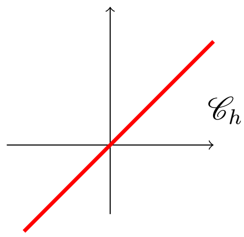
$$f : E \to F$$
$$x \mapsto f(x),$$

où E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée et pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'élément de F associé à x, appelé **image** de x par l'application f.

Exemples 28 *Les courbes représentatives suivantes appartiennent-elles à des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?*







. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition 29 *Si $f : E \to F$ est une application, l'ensemble E est appelé* . . . .

. . . .

Le domaine définition ne contient que des éléments qui possèdent une image par le procédé de transformation $x \mapsto f(x)$.

Remarque 30 *En pratique, lorsque l'on a une application $f : E \subset \mathbb{R} \to F$, pour trouver son domaine de définition E, on cherche :*
. soit les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ n'existe pas et on les « enlève » de $\mathbb{R}$ (lorsque l'on a une fraction dans l'expression de la fonction et un dénominateur susceptible de s'annuler...).
. soit on cherche directement les x pour lesquels $f(x)$ existe (si on a une expression qui contient une racine, un logarithme...).

Exemples 31 *Soient E_1, E_2 et E_3 trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Déterminer les domaines de définition E_1, E_2 et E_3 des applications f_1, f_2 et f_3 suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : E_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : E_2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_3 : E_3 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \end{array}$$

. $\dfrac{1}{x+2}$ . . . .

. . . .

. $\sqrt{x+1}$ . . . .

. . . .

. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition 32 *Deux applications $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ sont **égales** si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :*

1. *............................. (égalité des ensembles de départ).*
2. *............................. (égalité des ensembles d'arrivée).*
3. *.. (égalité du procédé de transformation).*

Si ces trois propriétés sont vérifiées, on note alors $f_1 = f_2$.

Exemples 33 *Les applications*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

. . . .

. . . .

3.2 Antécédent, graphe, image directe et image réciproque

Définitions 34 *Soient $f : E \to F$ une application, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F.*

— *On appelle **antécédent** de $y \in F$ par l'application f tout élément $x \in$ .... tel que .... On dit alors que y est l'**image** de x par l'application f.*

— *Le **graphe de** f est le sous-ensemble de .... noté .... défini par*

. . . .

— *L'**image de** f est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

. . . .

— ***L'image de** A **par** f est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

. . . .

— ***L'image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

. . . .

Exemples 35

Remarque 36 *Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\Im(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\Im(f)$ est un .... de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un .... de F. On note ....*

Exemple 37 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\Im(f)$, $f([1,4])$, $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}([-2,-1])$.* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition 38 *Soient $f : \mathscr{D}_f \to F$ et $g : \mathscr{D}_g \to G$ deux applications telles que* . . . . *(ce qui veut dire que l'image de f est inclus dans l'espace de départ de g). On définit alors l'application composée* . . . .

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Remarques 39

1. *La composition $g \circ f$ consiste à appliquer f puis g. Elle n'existe que si la condition ....*

   est vérifiée. Celle-ci est en effet indispensable pour que l'image par .... de .... avec

   $x \in$ .... puisse exister. Notons que si $F \subset \mathscr{D}_g$ alors comme par définition $\mathcal{I}(f) \subset F$ on a donc

   $\mathcal{I}(f) \subset \mathscr{D}_g$ et donc la composition $g \circ f$ existe.

2. *Attention, l'opération de composition $\circ$ n'est pas commutative ce qui veut dire que $f \circ g$ n'est en général pas égale à $g \circ f$.*
3. *Si .... on peut définir la composition $f \circ g$ qui est donnée par*

$$\begin{array}{rcl} f \circ g : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

   Notons que $f \circ g$ existe également sous la condition .... puisque on a toujours l'inclusion $\mathcal{I}(g) \subset G$.

Exemples 40 *On considère les applications :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{et } \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Peut-on définir les applications $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ f$? Si oui donnez-en la définition.

. $g \circ f$: ....

....

....

. $f \circ g$: ....

....

....

....

....

. $g \circ h$: ....

....

....

....

....

. $h \circ f$: ....

....

....

....

....

3.3 Applications fondamentales

Définition 41 *L'application* ***identité de*** E *notée* I_{d_E} *est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} I_{d_E} : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

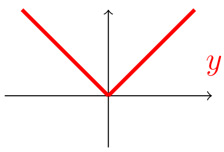
Proposition 42 *Soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to E$ *deux applications. Alors les applications* $f \circ I_{d_E} : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$ *et* $I_{d_E} \circ g : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$ *sont bien définies et vérifient les égalités suivantes*

$$f \circ I_{d_E} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad I_{d_E} \circ g = \ldots\ldots$$

Remarque 43 *L'identité dans* $\mathbb{R}$ *sera généralement notée* I_d *plutôt que* $I_{d_{\mathbb{R}}}$.

Définition 44 *L'application* ***valeur absolue*** *notée* $|\,.\,|$ *est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} |\,.\,| : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ldots\ldots & \textit{si} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \textit{si} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \end{array}$$



Remarques 45 *1) Sur la droite numérique,* $|x - y|$ *représente la distance entre les réels* x *et* y*, en particulier,* $|x|$ *représente la distance entre les réels* x *et* 0*.*
2) Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, on définit la valeur absolue de* f *par*

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \textit{ si } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \textit{ si } f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Exemples 46

$$|2x+1| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$|1-x| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$|x^2-4| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Proposition 47 *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tout x et y dans $\mathbb{R}$*

1. $|x|$............. , $|-x| =$ .... *et* $|x| > 0 \Leftrightarrow$ ....
2. $\sqrt{x^2} =$ ....
3. $|xy| =$ ....
4. $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant r \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ....
5. $\forall b \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{...} & \textit{si} \quad b \geqslant 0 \\ \text{...} & \textit{si} \quad b < 0. \end{cases}$
6. ***L'inégalité triangulaire*** : $|x+y| \leqslant$ ....
7. ***Seconde inégalité triangulaire*** : .... $\leqslant |x-y|$.

Preuve. Montrons l'inégalité triangulaire : soient $x, y \in \mathbb{R}$ fixés.

On a toujours. . . . .

En additionnant ces deux inégalités, on obtient . . . .

. . . .

et en utilisant le point 4), avec $r =$. . . . .

on en déduit que. . . . .

ce qui prouve la 1ère inégalité triangulaire.
Montrons maintenant la 2ème inégalité. On a . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

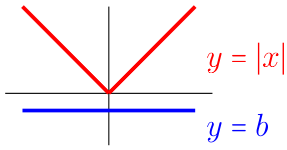
. . . .

ce qui prouve la 2ème inégalité triangulaire. ■

Remarque 48

Pour tout $b \in \mathbb{R}_-^*$, l'inéquation $|x| \leqslant b$. . . . .

. . . .



3.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 49 *Une application $f : E \to F$ est dite* . . . .

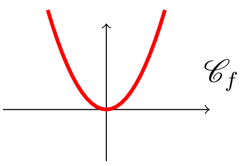
. . . .

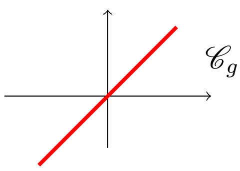
Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède ***au plus*** *un antécédent par f.*

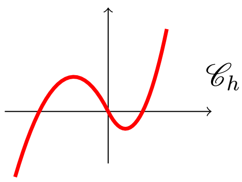
. . . .

. . . .

Exemples 50 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*







. . . .

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on considère deux points x et y quelconques de E tels que $f(x) = f(y)$ et on manipule cette égalité pour montrer que cela implique $x = y$.
Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffira d'exhiber deux points distincts ayant la même image.

Exemples 51

1. *L'application* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ *est injective. En effet,*

   ....

   ....

   ....

2. *L'application* $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

3. *L'application* $\tilde{g} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

4. *L'application* $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

5. *L'application* $j : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

6. *L'application* $k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

....

....

....

....

Remarque 52 *L'injectivité ou la non injectivité d'une application dépend fortement de son espace de départ, et pas seulement du procédé de transformation. En effet, on a vu que l'application* g *ci-dessus n'est pas injective, mais sa restriction à* $\mathbb{R}_+$ *notée ici* $\tilde{g}$ *l'est :*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g} : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Définitions 53 *Soient* $A, B \subset \mathbb{R}$ *deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *et* $f : A \to B$ *une application.*
. On dit que f *est croissante si*

....

. On dit que f *est décroissante si*

....

. On dit que f *est strictement croissante si*

....

. On dit que f *est strictement décroissante si*

....

. On dit que f *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
. On dit que f *est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Fonctions quelconques

Fonctions croissantes

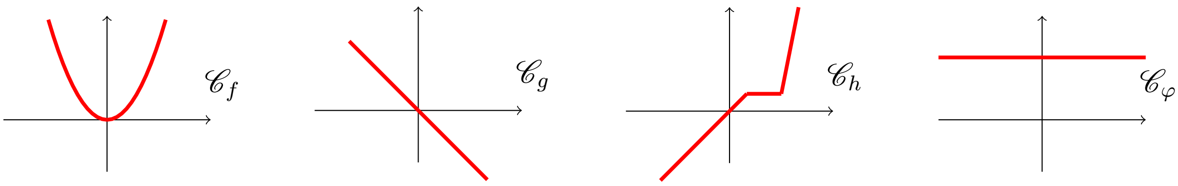
Fonctions décroissantes

Fonctions constantes

Fonctions strictement croissantes

Fonctions strictement décroissantes

Exemples 54 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*



.... est sans monotonie, ... est constante, ... est croissante, ... est strictement décroissante.

> **Proposition 55** ....
>
> ....

Preuve. On suppose qu'une application $f : E \to F$ est strictement monotone et on souhaite montrer qu'elle est injective c'est à dire : ....

Raisonnons par contraposée en montrant que..

....

....

....

Quitte à intervertir leurs rôles, on peut supposer que..

si f est strictement croissante, on a..

....

et si f est strictement décroissante, on a..

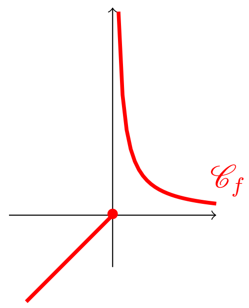
....

Dans les deux cas, on a montré que ....

ce qui prouve (par contraposée) que f est injective. ∎

Remarque 56 *Pour que la réciproque de cette proposition soit vraie, il faut que l'application soit de plus continue. On a le contre-exemple suivant : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{si} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \textit{si} \quad x > 0. \end{cases}$$



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

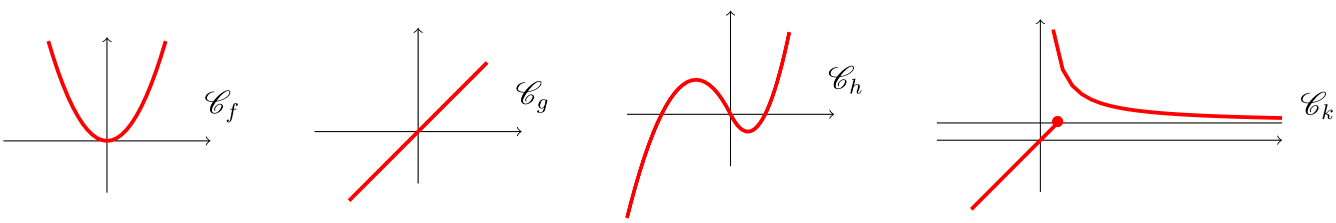
Définition 57 *Une application $f : E \to F$ est dite* . . . .

. . . .

Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède <u>au moins</u> un antécédent par f.

. . . .

Exemples 58 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*



. . . .

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on pourra donner, pour tout $y \in F$, une solution $x \in E$ à l'équation $f(x) = y$.
Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, il suffira de trouver un $y_0 \in F$ tel que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.

Exemples 59

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ ....

....

....

....

....

....

2. $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ ....

....

....

....

....

....

....

3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

....

....

....

....

4. $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

....

....

....

....

5. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ ....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 60 *La surjectivité ou la non surjectivité d'une application dépend fortement de ses espaces de départ et d'arrivée, et pas seulement du procédé de transformation. En effet, on a vu que* g *ci-dessus n'est pas surjective, mais* $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *l'est et* $\hat{g} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *ne l'est plus car l'équation* $\hat{g}(x) = 0$ *n'a pas de solution dans* $[1,+\infty[$.

Proposition 61 ....

....

....

Définition 62 *Une application* $f : E \longrightarrow F$ ....

....

....

Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède <u>exactement</u> un antécédent par f.

....

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on pourra au choix :
. Montrer qu'elle est injective et indépendamment qu'elle est surjective.
. Ou alors montrer que pour tout $y_0 \in F$, l'équation $f(x) = y_0$ possède une unique solution x dans E.
Pour montrer qu'elle n'est pas bijective, on pourra au choix :
. Exhiber une valeur $y_0 \in F$ telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.
. Ou bien deux valeurs distinctes $x_1 \neq x_2 \in E$ telles que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple 63 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$ ....

.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....
.... | ....

Théorème 64 *Soit $f : E \to F$ une application.* ....

....

Autrement dit, toute application strictement monotone est une bijection sur son image.

Exemple 65 *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ ....

x	
f'	
f	

....
....
....
....

. . . .

. . . .

. . . .

⚠*Le raisonnement ci-dessus ne fonctionne que sur $\mathbb{R}_+$ et pas sur $\mathbb{R}$ entier. En effet, comme f' change de signe sur $\mathbb{R}$ alors f n'est plus injective.*

3.5 Application réciproque

Définition 66 *Pour toute application* ***bijective*** *$f : E \longrightarrow F$,* . . . .

. . . .

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit bien défini de manière unique.

Exemple 67 *On considère l'application* $f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 2] & \longrightarrow & \mathcal{I}(f) \\ x & \longmapsto & x^2 - 4x + 3. \end{array}$ *Dresser le tableau de variations de f, déterminer $\mathcal{I}(f)$, montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1}.*

x	
f'	
f	

. . . .

. . . .

f' s'annule uniquement en 2 et ne change pas de signe donc f est strictement décroissante.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition 68 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E, \text{ c'est à dire } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F, \text{ c'est à dire } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve.

. Montrons que $f^{-1} \circ f = Id_E$. On a $f : E \to F$ et $f^{-1} : F \to E$. Comme . . . .

$f^{-1} \circ f$: ....→....... a bien un sens. Soit $x_0 \in E$, calculons $f^{-1}(f(x_0))$. Par définition, $f^{-1}(f(x_0))$ est l'unique $x \in E$ tel que .... Par injectivité de f, on a alors ....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. Réciproquement, montrons que $f \circ f^{-1} = Id_F$. Soit $y_0 \in F$. Par définition, $f^{-1}(y_0) = x_0$, où x_0 est unique et vérifie $f(x_0) = y_0$. En appliquant f à $f^{-1}(y_0)$, on a $f(f^{-1}(y_0)) = f(x_0) = y_0$, ce qui prouve bien que $f \circ f^{-1} = Id_F$.

■

ANNEXE A : ÉTUDIER LA BIJECTIVITÉ D'UNE APPLICATION

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Voici 3 méthodes pour étudier la bijectivité de f.

MÉTHODE 1 : En utilisant la définition :

Injectivité : on montre que $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Surjectivité : on montre que $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

MÉTHODE 2 : En dressant le tableau de variations de f :

Injectivité : on étudie les variations de f : si f est strictement monotone alors elle est injective.
Surjectivité : on détermine l'image de f notée $\mathcal{I}(f)$ grâce au tableau : si $\mathcal{I}(f) = F$ alors f est surjective.

MÉTHODE 3 : En essayant de déterminer directement f^{-1} :

Pour tout $y \in F$ on résout l'équation $y = f(x)$ et on vérifie les trois points suivants :
- Pour tout $y \in F$, la solution existe toujours (attention aux dénominateurs qui s'annulent et aux racines de quantités négatives !).
- La solution que l'on obtient appartient au domaine de définition $\mathcal{D}_f = E$ de f (on pense à vérifier que la solution est bien dans l'espace de départ de f).
- Il y a exactement une seule solution.

Injectivité : elle est donnée par l'unicité de la solution.
Surjectivité : elle est donnée par l'existence d'une solution dans E.

ASTUCE DANS LE CAS OÙ E ET F SONT DES PRODUITS CARTÉSIENS*

Si on note $dim(E)$ la dimension de E et $dim(F)$ celle de F on peut s'aider des astuces suivantes pour trouver des contre-exemples :

- Si $dim(E) < dim(F)$ en général f est injective mais non surjective.
- Si $dim(E) > dim(F)$ en général f est surjective mais non injective.

Attention, ces astuces ne fournissent en aucun cas des preuves d'injectivité ou de surjectivité, elles servent uniquement à nous orienter pour la recherche de contre exemples !

Exemples 69 *On considère les applications* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x+1) \end{array}$.

D'après l'astuce, comme $dim(\mathbb{R}^2) = 2 > 1 = dim(\mathbb{R})$*,* f *risque de ne pas être injective mais surjective et le contraire pour* g*.*
Injectivité : f *non injective car* $f(1,0) = f(0,1)$ *et* $(1,0) \neq (0,1)$ *alors que* g *est injective car*

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ g(x) = g(x') \Rightarrow (x, x+1) = (x', x'+1) \Rightarrow x = x' \textit{ et } x+1 = x'+1 \Rightarrow x = x' \textit{ et } x = x' \Rightarrow x = x'.$$

Surjectivité : f *est surjective car* $\forall y \in \mathbb{R}, f(0,y) = y$ *et* $(0,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_f$ *alors* g *non surjective car* $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ *n'a pas d'antécédent par* g *:*

$$g(x) = (1,3) \Leftrightarrow (x, x+1) = (1,3) \Leftrightarrow x = 1 \textit{ et } x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 1 \textit{ et } x = 2 \textit{ ce qui est impossible}.$$

*. Par exemple $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.