Aix-Marseille Université | **Année 2021-2022**
Introduction à l'analyse | Parcours PEIP

PROGRAMME DÉTAILLÉ

Chapitre 1 : Applications $\simeq 16h$

- Introduction à la logique : assertions, connecteurs, quantificateurs, négation, implication, équivalence, contraposée, réciproque.
- Les ensembles : vocabulaire de théorie des ensembles (union, intersection, produit cartésien, complémentaire, partie...).
- Applications : domaine de définition, image directe et réciproque, composition, application identité, injectivité, surjectivité, bijectivité et application réciproque.

Chapitre 2 : Fonctions usuelles $\simeq 8h$

- Rappels sur les fonctions usuelles vues au lycée : fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente).
- Nouvelles fonctions usuelles : fonctions puissances, fonctions trigonométriques réciproques (arcsinus, arccosinus, arctangente).

Chapitre 3 : Limites et fonctions continues $\simeq 12h$

- Rappels sur les fonctions : fonction majorée, minorée, bornée, nulle, constante, monotone, périodique, paire, impaire...
- Limite : définition (avec les quantificateurs) de la limite en un point, en l'infini, limite à gauche et à droite en un point, unicité de la limite, limite de fonctions usuelles, théorème du signe, théorème des gendarmes, croissances comparées, composition de limites.
- Continuité : définition (avec les quantificateurs) de la continuité en un point, prolongement par continuité, continuité de l'application réciproque et théorème de la bijection.

Chapitre 4 : Dérivées et primitives $\simeq 16h$

- Dérivée : définition de la dérivée, domaine de dérivabilité, dérivation des fonctions usuelles, dérivation d'une composition, dérivation de l'application réciproque.
- Application de la dérivée : équation de la tangente en un point, étude des variations d'une fonction, définition de la convexité et la concavité.
- Intégrales et primitives : définition de l'intégrale sur un intervalle, intégrale et aire, primitives de fonctions usuelles, formule d'intégration par parties, changement de variable, intégration de fonctions trigonométriques et de fractions rationnelles (utilisation de la décomposition en éléments simples vue dans l'UE « géométrie et polynômes »).

Chapitre 5 : Équations différentielles $\simeq 8h$

- Équations linéaires du 1er ordre à coefficients continus : équation avec conditions initiales, recherche de solution particulière pour des cas particuliers (dans le cas de coefficients constants), méthode de variation de la constante.
- Équations linéaires du 2nd ordre à coefficients constants : équation avec conditions initiales et recherche de solution particulière pour des cas particuliers.

Chapitre 1 : Applications

Caroline Bauzet*

1er octobre 2021

Table des matières

1 Quelques notions de logique

Définition 1.1 *Une assertion ou proposition mathématique est une phrase qui est soit vraie, soit fausse mais pas les deux en même temps.*

Exemples 1.2
. « $0 < 4$ » *est une assertion qui est vraie.*
. « *L'exponentielle est une fonction décroissante* » *est une assertion qui est fausse.*
. « *Le triangle ABC* » *n'est pas une assertion mathématique.*
. « *La somme des angles du triangle ABC vaut* $180\,^{\circ}$» *est une assertion mathématique qui est vraie.*

Définition 1.3 *Soit P une assertion mathématique. On appelle négation de P l'assertion qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie. On la note non(P) ou encore $\overline{P}$.*

Exemples 1.4 1. *Si P est l'assertion* « $1 < 4$ », *alors l'assertion non(P) est* . . . .

2. *Si R est l'assertion* « $1 \geqslant 3$ », *alors l'assertion non(R) est* . . . .

Si P et Q sont deux assertions, il est possible de créer de nouvelles assertions à partir de celles-ci en utilisant des connecteurs logiques.

*. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

Définitions 1.5 *Soient P et Q deux assertions. On définit les connecteurs logiques suivants*

- *Le connecteur **implication** noté « $\Rightarrow$ » permet de créer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » qui se lit « P implique Q » et qui signifie que si P est vraie alors Q est forcément vraie aussi.*
- *Le connecteur **équivalence** noté « $\Leftrightarrow$ » permet de créer l'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » qui se lit « P est équivalente à Q » et qui signifie que P implique Q **et que** Q implique P.*

Remarque 1.6 *Si l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition **suffisante** pour que Q soit vraie et que Q est une condition **nécessaire** pour que P soit vraie.*

Exemples 1.7 1. *L'assertion « $2 \leqslant 3 \Rightarrow 2^2 \leqslant 3^2$ » est-elle vraie ?* ....

....

2. *Notons P l'assertion « $2 \leqslant 4$ » et **Q** l'assertion « $4 \leqslant 16$ ». L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est elle vraie ?*

....

....

....

....

....

....

Une expression mathématique peut dépendre d'une variable x appartenant à un ensemble donné noté E (par exemple $E = \mathbb{R}$, ou $[0,1]$, ou $\mathbb{N}$...), notons la P_x. Par exemple, l'inégalité P_x donnée par

$$\ln(x) \geqslant 0$$

est vraie pour tout x.................. et fausse pour x............... Si P_x est une expression dépendant d'une variable x ($x \in E$), trois cas peuvent se présenter :

1. L'expression P_x est vérifiée pour tout $x \in E$. On note alors ....

   Le quantificateur $\forall$ se lit « pour tout ».

2. L'expression P_x est vérifiée pour au moins un $x \in E$. On note alors. ....

   ....

   Le quantificateur $\exists$ se lit « il existe ». Le symbole « : » est utilisé pour dire « tel que » (on pourra aussi rencontrer la notation slash « / » à la place des « : »).

3. L'expression P_x n'est vraie pour aucune valeur de $x \in E$. On ne définit pas de nouveau quantificateur, car on peut remarquer que cela signifie que l'expression non(P_x) est vérifiée pour tout $x \in E$. On a dans ce cas : $\forall x \in E,\ \text{non}(P_x)$.

Notation : On utilise parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie : il existe un unique. L'écriture

$$\exists! x \in E : \; P_x$$

veut donc dire que la assertion P_x est vraie pour un **unique** $x \in E$.

Remarques 1.8 *(Ordre des quantificateurs)*
Il est possible de combiner des quantificateurs pour créer de nouvelles assertions : notons P l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$$

P signifie que pour n'importe quel réel x, il existe (au moins) un réel y tel que la somme $x + y$ soit strictement positive. Dans cette assertion, le y peut tout à fait dépendre de x car il est introduit après x. ....

....

....

....

Attention : *l'ordre des quantificateurs est important : notons Q l'assertion suivante :*

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0.$$

Les assertions P et Q sont différentes : P est vraie alors que Q est fausse car il faudrait trouver un réel y tel que pour tout réel x la somme $x + y$ soit positive. ....

....

....

Exemples 1.9 *Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :*

1. La fonction cosinus est minorée par -1 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$: ....

2. L'équation $\ln(x) = 1$ a une seule solution strictement positive : ....

2 Notations d'ensemble

2.1 Les ensembles

Définition 2.1 *Un ensemble est une collection d'objets qui est caractérisé par les éléments qu'il contient. On notera en majuscule les ensembles (ex : A, E, F, ...) et en minuscule les éléments (ex : x, y, a, b, ...).*

Exemples 2.2 $E = \{1, 2, 5\}$ *et* $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\}$ *sont des ensembles.* ....

....

Définitions 2.3 *(Ensembles particuliers)*

- *On appelle **ensemble vide** l'ensemble qui ne contient aucun élément et on le note* $\varnothing$.
- *On appelle **singleton** un ensemble qui contient un seul élément et on le note* $\{a\}$.

On considère E, F deux ensembles. On manipulera dans ce qui suit les notions suivantes :

— **L'inclusion** : on dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F.

Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on a $A \subset B \Leftrightarrow$ ....

— **L'égalité** : on dit que les ensembles E et F sont égaux si et seulement si E est inclus dans F et F est inclus dans E :

$$E = F \Leftrightarrow \text{.......................................}$$

— **Ensemble des parties de E :** on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$,

$\mathcal{P}(E) =$ ....

L'ensemble E contient .... éléments, ... est appelé le .... de E et est noté card(E).

Remarque : quel que soit l'ensemble E considéré, $\mathcal{P}(E)$ contient toujours au moins deux éléments : $\varnothing$ et E.

Soient A et B deux parties de E.

— **Le complémentaire** : On définit le complémentaire de A par

$$A^c = \text{...}$$

Autres notations : $E \setminus A$, ou $\overline{A}$.
Si $A \subset B$, on définit le complémentaire de A dans B par

$$\complement_B A = \text{..,} \quad \text{aussi noté } B \setminus A.$$

— **L'union** :

$$A \cup B = \text{...}$$

Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B.

— **L'intersection** :

$$A \cap B = \text{...}$$

— **Le produit cartésien** :

$$A \times B = \text{...}$$

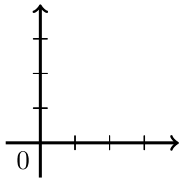
Exemples 2.4 *On considère $A = \{1,2\}$ et $B = \{1,2,3,4\}$ deux sous-ensembles de $C = \{1,2,3,4,5\}$. Déterminer $A^c, B^c, B \setminus A, A \cup B, A \cap B$ et $A \times B$.*

....

....

....

Soient $F = [0,1]$ et $D = [1,2]$. Représenter graphiquement $F \times D$.



2.2 Opérations sur les ensembles

Proposition 1 *(Règles de calculs)*
Soient A, B et C des ensembles. On a

- $A \cap \varnothing =$ ...., $A \cap A =$ ....
- $A \cup \varnothing =$ ...., $A \cup A =$ ....
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) =$ ....
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cup C) =$ ....
- $A \cup (B \cap C) =$ ....

Proposition 2 *(Relations remarquables)*
*Soient **A,B,E** trois ensembles avec $A, B \subset E$. On a :*

- $A \subset$ .... *et* $B \subset$ ....
- $A \cap B \subset$ .... *et* $A \cap B \subset$ ....
- $A \subset B \Leftrightarrow$ ....
- $(A \cup B)^c =$ ....
- $(A \cap B)^c =$ ....
- $(A^c)^c =$ ....

Preuve. Montrons que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Considérons $x \in E$, on a

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 2.5 *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ possède les sous-ensembles suivants :*

. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, *et* $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

. $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$ *et* $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\} =]-\infty, 0[$.
. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *l'ensemble des entiers naturels.*
. $\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ *l'ensemble des entiers relatifs.*
. $\mathbb{Q} = \{$..$\}$ *l'ensemble des rationnels.*
. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *l'ensemble des irrationnels.*

Remarque 2.6 ....

Notation : $\overline{\mathbb{R}}$ = ... = ... Il s'agit d'une notation qui permet de raccourcir des écritures du type

« $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$ » s'écrit de façon plus concise $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 3 $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a \times b = 0 &\Leftrightarrow \text{......................................} \\
a < b &\Leftrightarrow \text{......................................} \\
(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a) &\Leftrightarrow \text{......................................} \\
(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) &\Rightarrow \text{......................................} \\
(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) &\Rightarrow \text{......................................} \\
(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) &\Rightarrow \text{......................................} \\
(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) &\Rightarrow \text{......................................}
\end{aligned}$$

Proposition 4 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* a *et* b *sont de même signe alors on a :*

$$a^2 = b^2 \text{ .... } a = b.$$

Proposition 5 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Si* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *alors* $a \leqslant b$ .... $a^2 \leqslant b^2$.
- *Si* $a, b \in \mathbb{R}_-$ *alors* $a \leqslant b$ .... $a^2 \geqslant b^2$.
- *Si* $a \in \mathbb{R}_-$ *et* $b \in \mathbb{R}_+$ *alors* a .... $\sqrt{b}$.
- *Si* $a \in \mathbb{R}_+$ *et* $b \in \mathbb{R}_+$ *alors* $a \leqslant \sqrt{b}$ .... $a^2 \leqslant b$.

Exemples 2.7 *La condition sur le signe énoncée dans les résultats précédents est indispensable.*

1. *En effet, les équivalences suivantes sont fausses :*

$$(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow -3 = 3, \textit{ ce qui est absurde !}$$

$$-3 < 2 \Leftrightarrow (-3)^2 \leqslant 2^2 \Leftrightarrow 9 \leqslant 4, \textit{ ce qui est absurde !}$$

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $x+1 \leqslant \sqrt{x^2+1} \quad (\star)$.
Si $x+1<0$*, alors* $(\star)$ *est toujours vérifiée et on trouve comme premier ensemble de solutions*

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x+1<0\} =]-\infty, -1[.$$

Si $x+1 \geqslant 0$***, alors*** $(\star) \Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant (\sqrt{x^2+1})^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leqslant x^2+1 \Leftrightarrow 2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. ***On trouve*** *comme deuxième ensemble de solutions*

$$S_2 =]-\infty, 0] \cap [-1, +\infty[= [-1, 0].$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $(\star)$ *est* $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -1[\cup [-1, 0] =]-\infty, 0]$.

3. *Résoudre sur* $[-1, +\infty[$ *l'équation* $2x+1 = \sqrt{x+1}$. ....

Définitions 2.8 *Le **maximum** de deux réels* a *et* b *noté* $\max(a,b)$ *est défini de la façon suivante*

$$\max(a,b) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

*Le **minimum** de deux réels* a *et* b *noté* $\min(a,b)$ *est défini de la façon suivante*

$$\min(a,b) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Remarque 2.9 *Soient* a, b *deux réels donnés. On a les propriétés suivantes :*

1. . . . .
2. . . . .

3 Applications

Dans toute la suite, on considère deux ensembles quelconques E et F.

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Une **application** (ou fonction) c'est la donnée de trois choses :*

1. ....
2. ....
3. ....

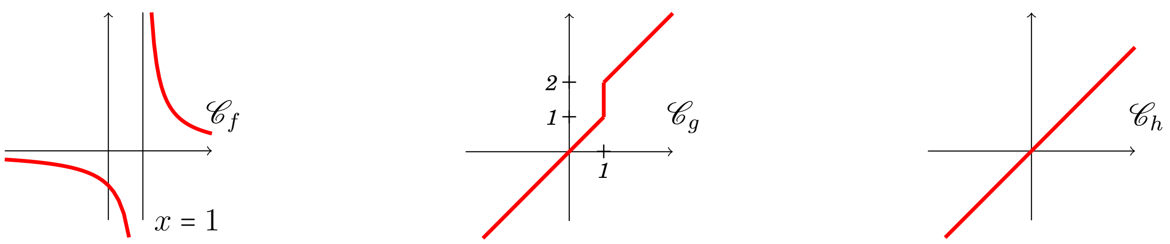
   ....

<u>Notation</u> Une application f sera notée

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

où E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée et pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'élément de F associé à x, appelé **image** de x par l'application f.

Exemples 3.2 *Les courbes représentatives suivantes appartiennent-elles à des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?*



....

....

....

....

Définition 3.3 *Si $f : E \to F$ est une application, l'ensemble E est appelé* ....

....

Le domaine définition ne contient que des éléments qui possèdent une image par le procédé de transformation $x \mapsto f(x)$.

Remarque 3.4 *En pratique, lorsque l'on a une application $f : E \subset \mathbb{R} \to F$, pour trouver son domaine de définition E, on cherche :*
. soit les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ n'existe pas et on les « enlève » de $\mathbb{R}$ (lorsque l'on a une fraction dans l'expression de la fonction et un dénominateur susceptible de s'annuler...).
. soit on cherche directement les x pour lesquels $f(x)$ existe (si on a une expression qui contient une racine, un logarithme...).

Exemples 3.5 *Soient E_1, E_2 et E_3 trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Déterminer les domaines de définition E_1, E_2 et E_3 des applications f_1, f_2 et f_3 suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : E_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : E_2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_3 : E_3 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \end{array}$$

. $\dfrac{1}{x+2}$ ....

....

. $\sqrt{x+1}$ ....

....

. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$ ....

....

....

....

....

....

Proposition 6 *Deux applications $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ sont **égales** si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :*

1. .... *(égalité des ensembles de départ).*
2. .... *(égalité des ensembles d'arrivée).*
3. .... *(égalité du procédé de transformation).*

Si ces trois propriétés sont vérifiées, on note alors $f_1 = f_2$.

Exemples 3.6 *Les applications*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x+1 \qquad \text{et} \qquad g : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x+1$$

....

....

3.2 Antécédent, graphe, image directe et image réciproque

Définitions 3.7 *Soient $f : E \to F$ une application, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F.*

— *On appelle **antécédent** de $y \in F$ par l'application f tout élément $x \in$ .... tel que ....*
*On dit alors que y est l'**image** de x par l'application f.*

— *Le **graphe de** f est le sous-ensemble de .... noté .... défini par*

....

— *L'**image de** f est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

....

— *L'**image de** A **par f** est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

....

— *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de .... noté .... et défini par*

....

Exemples 3.8

Remarque 3.9 *Il ne faut pas confondre l'image de f notée $\Im(f)$ et l'image de x par f notée $f(x)$ car ce ne sont pas le même type d'objet. En effet, $\Im(f)$ est un .... de l'espace d'arrivée F alors que $f(x)$ est un .... de F. On note ....*

Exemple 3.10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\Im(f)$, $f([1,4])$, $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}([-2,-1])$.* ....

....

....

....

Définition 3.11 *Soient $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ deux applications telles que* .... *(ce qui veut dire que l'espace d'arrivée de f est inclus dans l'espace de départ de g). On définit alors l'application composée* ....

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} .... & \to & .... \\ x & \mapsto & .... \end{array}$$

La composition $g \circ f$ consiste à appliquer f puis g. ....

....

....

Attention, l'opération de composition $\circ$ n'est pas commutative ce qui veut dire que $f \circ g$ n'est en général pas égale à $g \circ f$.

Remarque 3.12 *Si* .... *on peut définir la composition $f \circ g$ qui est donnée par*

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} .... & \to & .... \\ x & \mapsto & .... \end{array}$$

Exemples 3.13 *On considère les applications :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1], \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{et } h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Peut-on définir les applications $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ f$? Si oui donnez-en la définition.

. $g \circ f$: ....

. $f \circ g$: ....

....

....

. $g \circ h$: ....

....

....

. $h \circ f$: ....

....

....

3.3 Applications fondamentales

Définition 3.14 *L'application **identité de** E notée I_{d_E} est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} I_{d_E} : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

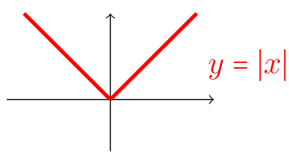
Proposition 3.15 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications. Alors les applications $f \circ I_{d_E} : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$ et $I_{d_E} \circ g : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$ sont bien définies et vérifient les égalités suivantes*

$$f \circ I_{d_E} = \ldots\ldots \quad \textit{et} \quad I_{d_E} \circ g = \ldots\ldots$$

Remarque 3.16 *L'identité dans $\mathbb{R}$ sera généralement notée I_d plutôt que $I_{d_{\mathbb{R}}}$.*

Définition 3.17 *L'application **valeur absolue** notée $|\,.\,|$ est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} |\,.\,| : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \ldots\ldots & \textit{si} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \textit{si} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \end{array}$$



Remarques 3.18 *1) Sur la droite numérique, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y, en particulier, $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.*
2) Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de f par

$$|f(x)| = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \textit{ si } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \textit{ si } f(x) \leqslant 0. \end{array} \right.$$

Exemples 3.19

$$|2x+1| = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$|1-x| = \begin{cases} \dotfill \\ \\ \dotfill \end{cases} = \begin{cases} \dotfill \\ \\ \dotfill \end{cases}$$

$$|x^2-4| = \begin{cases} \dotfill \\ \\ \dotfill \end{cases} = \begin{cases} \dotfill \\ \\ \dotfill \end{cases}$$

Proposition 7 *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes pour tout x et y dans $\mathbb{R}$*

1. $|x|$............. , $|-x| =$ .... *et* $|x| > 0 \Leftrightarrow$ ....
2. $\sqrt{x^2} =$ ....
3. $|xy| =$ ....
4. $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant r \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ....
5. $\forall b \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{..} & \textit{si} \quad b \geqslant 0 \\ \\ \text{..} & \textit{si} \quad b < 0. \end{cases}$
6. ***L'inégalité triangulaire :*** $|x+y| \leqslant$ ....
7. ***Seconde inégalité triangulaire :*** .... $\leqslant |x-y|$.

Preuve. Montrons l'inégalité triangulaire : soient $x, y \in \mathbb{R}$ fixés.

On a toujours..

En additionnant ces deux inégalités, on obtient ....

....

et en utilisant le point 4), avec $r =$..

on en déduit que..

ce qui prouve la 1ère inégalité triangulaire. Montrons maintenant la 2ème inégalité. On a.......

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

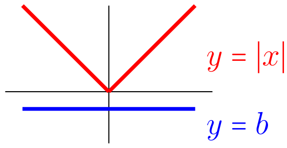
. . . .

ce qui prouve la 2ème inégalité triangulaire. ∎

Remarque 3.20

Pour tout $b \in \mathbb{R}_-^*$, l'inéquation $|x| \leqslant b$. . . . .

. . . .



3.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3.21 *Une application $f : E \to F$ est dite* . . . .

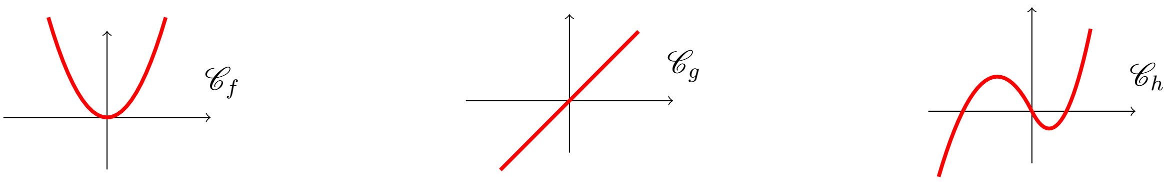
. . . .

*Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède **au plus** un antécédent par f.*

. . . .

. . . .

Exemples 3.22 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*



. . . .

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on considère deux points x et y quelconques de E tels que $f(x) = f(y)$ et on manipule cette égalité pour montrer que cela implique $x = y$.
Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffira d'exhiber deux points distincts ayant la même image.

Exemples 3.23

1. *L'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ *est injective. En effet,*

   ....

   ....

   ....

2. *L'application* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

3. *L'application* $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

4. *L'application* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

5. *L'application* $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

6. *L'application* $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque 3.24 *L'injectivité ou la non injectivité d'une application dépend fortement de son espace de départ, et pas seulement du procédé de transformation. En effet, on a vu que l'application* g *ci-dessus n'est pas injective, mais sa restriction à* $\mathbb{R}_+$ *notée ici* $\tilde{g}$ *l'est :*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g} : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Définitions 3.25 *Soient* $A, B \subset \mathbb{R}$ *deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *et* $f : A \to B$ *une application.*
. On dit que f *est croissante si*

....

. On dit que f *est décroissante si*

....

. On dit que f *est strictement croissante si*

....

. On dit que f *est strictement décroissante si*

....

. On dit que f *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*
. On dit que f *est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Fonctions quelconques

Fonctions croissantes

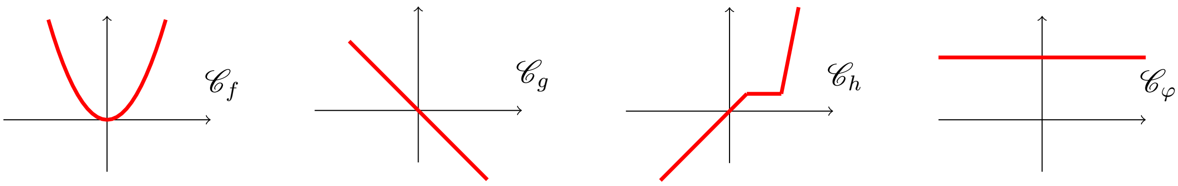
Fonctions décroissantes

Fonctions constantes

Fonctions strictement croissantes

Fonctions strictement décroissantes

Exemples 3.26 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*



.... est sans monotonie, ... est constante, ... est croissante, ... est strictement décroissante.

> **Proposition 8** ....
>
> ....

Preuve. On suppose qu'une application $f : E \to F$ est strictement monotone et on souhaite montrer qu'elle est injective c'est à dire : ....

Raisonnons par contraposée en montrant que..

....

....

....

Quitte à intervertir leurs rôles, on peut supposer que...

si f est strictement croissante, on a..

....

et si f est strictement décroissante, on a..

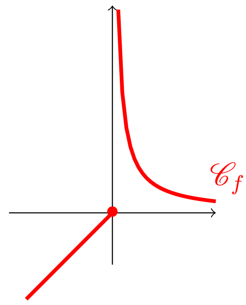
....

Dans les deux cas, on a montré que ....

ce qui prouve (par contraposée) que f est injective. ■

Remarque 3.27 *Pour que la réciproque de cette proposition soit vraie, il faut que l'application soit de plus continue. On a le contre-exemple suivant : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{si} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \textit{si} \quad x > 0. \end{cases}$$



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

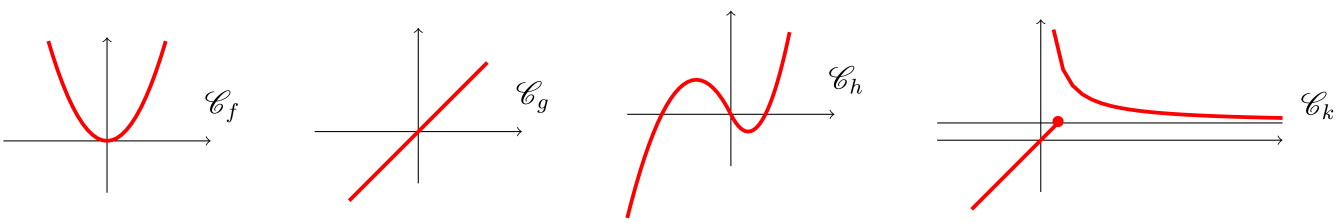
Définition 3.28 *Une application $f : E \to F$ est dite* . . . .

. . . .

Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède <u>au moins</u> un antécédent par f.

. . . .

Exemples 3.29 *On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :*



. . . .

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on pourra donner, pour tout $y \in F$, une solution $x \in E$ à l'équation $f(x) = y$.
Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, il suffira de trouver un $y_0 \in F$ tel que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.

Exemples 3.30

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

5. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ ....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 3.31 *La surjectivité ou la non surjectivité d'une application dépend fortement de ses espaces de départ et d'arrivée, et pas seulement du procédé de transformation. En effet, on a vu que* g *ci-dessus n'est pas surjective, mais* $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *l'est et* $\hat{g} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *ne l'est plus car l'équation* $\hat{g}(x) = 0$ *n'a pas de solution dans* $[1,+\infty[$.

Proposition 9 ....

....

....

Définition 3.32 *Une application* $f : E \longrightarrow F$ ....

....

....

Autrement dit, tout point de l'espace d'arrivée possède <u>*exactement*</u> *un antécédent par* f.

....

Méthodologie : Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on pourra au choix :
. Montrer qu'elle est injective et indépendamment qu'elle est surjective.
. Ou alors montrer que pour tout $y_0 \in F$, l'équation $f(x) = y_0$ possède une unique solution x dans E.
Pour montrer qu'elle n'est pas bijective, on pourra au choix :
. Exhiber une valeur $y_0 \in F$ telle que l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution.
. Ou bien deux valeurs distinctes $x_1 \neq x_2 \in E$ telles que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple 3.33 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$ ....

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Théorème 10 *Soit $f : E \to F$ une application.* ....

....

Autrement dit, toute application strictement monotone est une bijection sur son image.

Exemple 3.34 *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ ....

x	
f'	
f	

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

⚠*Le raisonnement ci-dessus ne fonctionne que sur $\mathbb{R}_+$ et pas sur $\mathbb{R}$ entier. En effet, comme f' change de signe sur $\mathbb{R}$ alors f n'est plus injective.*

3.5 Application réciproque

Définition 3.35 *Pour toute application **bijective** $f : E \longrightarrow F$,* . . . .

. . . .

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \ldots\ldots & \longrightarrow & \\ y & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On remarquera que la condition « f bijective » est essentielle si l'on veut que le x tel que $y = f(x)$ soit bien défini de manière unique.

Exemple 3.36 *On considère l'application* $f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 2] & \longrightarrow & \mathcal{I}(f) \\ x & \longmapsto & x^2 - 4x + 3. \end{array}$ *Dresser le tableau de variations de f, déterminer $\mathcal{I}(f)$, montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1}.*

x	
f'	
f	

. . . .

. . . .

f' s'annule uniquement en 2 et ne change pas de signe donc f est strictement décroissante.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition 11 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application <u>bijective</u> et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ sa réciproque. Alors*

$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, *c'est à dire* ....,

et

$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, *c'est à dire* ....

Preuve.

. Montrons que $f^{-1} \circ f = Id_E$. On a $f : E \to F$ et $f^{-1} : F \to E$. Comme . . . .

$f^{-1} \circ f$: ....→....... a bien un sens. Soit $x_0 \in E$, calculons $f^{-1}(f(x_0))$. Par définition, $f^{-1}(f(x_0))$ est l'unique $x \in E$ tel que .... Par injectivité de f, on a alors ....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. Réciproquement, montrons que $f \circ f^{-1} = Id_F$. Soit $y_0 \in F$. Par définition, $f^{-1}(y_0) = x_0$, où x_0 est unique et vérifie $f(x_0) = y_0$. En appliquant f à $f^{-1}(y_0)$, on a $f(f^{-1}(y_0)) = f(x_0) = y_0$, ce qui prouve bien que $f \circ f^{-1} = Id_F$.

■

ANNEXE A : ÉTUDIER LA BIJECTIVITÉ D'UNE APPLICATION

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Voici 3 méthodes pour étudier la bijectivité de f.

MÉTHODE 1 : En utilisant la définition :

Injectivité : on montre que $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Surjectivité : on montre que $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

MÉTHODE 2 : En dressant le tableau de variations de f :

Injectivité : on étudie les variations de f : si f est strictement monotone alors elle est injective.
Surjectivité : on détermine l'image de f notée $\mathcal{I}(f)$ grâce au tableau : si $\mathcal{I}(f) = F$ alors f est surjective.

MÉTHODE 3 : En essayant de déterminer directement f^{-1} :

Pour tout $y \in F$ on résout l'équation $y = f(x)$ et on vérifie les trois points suivants :
- Pour tout $y \in F$, la solution existe toujours (attention aux dénominateurs qui s'annulent et aux racines de quantités négatives !).
- La solution que l'on obtient appartient au domaine de définition $\mathcal{D}_f = E$ de f (on pense à vérifier que la solution est bien dans l'espace de départ de f).
- Il y a exactement une seule solution.

Injectivité : elle est donnée par l'unicité de la solution.
Surjectivité : elle est donnée par l'existence d'une solution dans E.

ASTUCE DANS LE CAS OÙ E ET F SONT DES PRODUITS CARTÉSIENS*

Si on note $dim(E)$ la dimension de E et $dim(F)$ celle de F on peut s'aider des astuces suivantes pour trouver des contre-exemples :

- Si $dim(E) < dim(F)$ en général f est injective mais non surjective.
- Si $dim(E) > dim(F)$ en général f est surjective mais non injective.

Attention, ces astuces ne fournissent en aucun cas des preuves d'injectivité ou de surjectivité, elles servent uniquement à nous orienter pour la recherche de contre exemples !

Exemples 3.37 *On considère les applications* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x+1) \end{array}$.

D'après l'astuce, comme $dim(\mathbb{R}^2) = 2 > 1 = dim(\mathbb{R})$, f risque de ne pas être injective mais surjective et le contraire pour g.

Injectivité : f non injective car $f(1,0) = f(0,1)$ et $(1,0) \neq (0,1)$ alors que g est injective car

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ g(x) = g(x') \Rightarrow (x, x+1) = (x', x'+1) \Rightarrow x = x' \text{ et } x+1 = x'+1 \Rightarrow x = x' \text{ et } x = x' \Rightarrow x = x'.$$

Surjectivité : f est surjective car $\forall y \in \mathbb{R}, f(0,y) = y$ et $(0,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_f$ alors g non surjective car $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ n'a pas d'antécédent par g :

$$g(x) = (1,3) \Leftrightarrow (x, x+1) = (1,3) \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = 2 \text{ ce qui est impossible.}$$

*. Par exemple $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.