Chapitre 2 : Fonctions usuelles

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Opérations sur les fonctions

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :*

. *la somme de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f + g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. *le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f \times g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. *la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(\lambda f)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. Alors :*

. *$f \geqslant g$ si* . . . .

. *$f \geqslant 0$ si* . . . .

. *$f > 0$ si* . . . .

. *f est dite constante sur U si :* . . . .

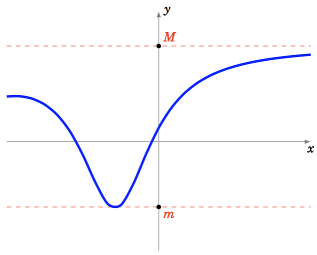
. *f est nulle sur U si* . . . .

. *f est <u>majorée</u> si* . . . .

. *f est <u>minorée</u> si* . . . .

. *f est <u>bornée</u> si* . . . .

(ou de façon équivalente . . . .*)*



1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définitions *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}$. On dit que :*

. *f est croissante sur U si* ....

. *f est strictement croissante sur U si* ....

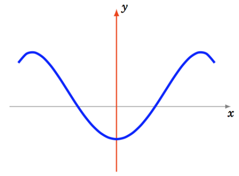
. *f est décroissante sur U si* ....

. *f est strictement décroissante sur U si* ....

. *f est monotone sur U si f est croissante ou décroissante sur U.*
. *f est strictement monotone sur U si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur U.*

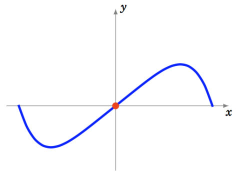
1.4 Parité et périodicité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$ ou $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*



. *f est paire si* ....

Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



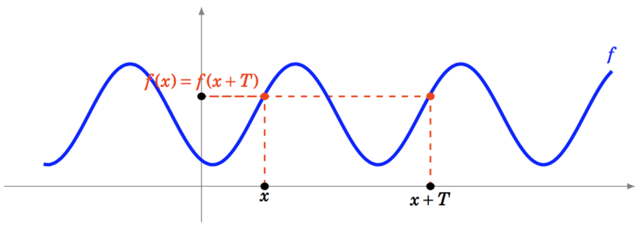
. *f est impaire si* ....

Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

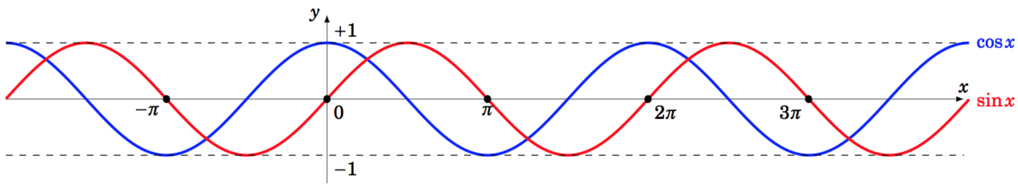
Exemple *La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.*

Définition *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T*

si ....



Exemple *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*



1.5 Continuité et dérivabilité d'une fonction

On note dans la suite I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.*
*. On dit que f est **continue en** a si* ....
*. On dit que f est **continue sur** I si* ....
*. On dit que f est **dérivable en** a si l'application*

$$\begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \overline{} \end{array}$$

. . . .
. . . .
. On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si . . . .
. . . .
*. On appelle **domaine de dérivabilité** de f l'ensemble $\tilde{I}$ =* . . . .
On note la fonction dérivée de f par f' : $\begin{array}{ccc} \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$.

Propriétés *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$

. $(f+g)'(x) =$ ....
. $(\lambda f)'(x) =$ ....
. $(f \times g)'(x) =$ ....
. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = \overline{}$, *si* $f(x)$..........
. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \overline{}$, *si* $g(x)$..........

Proposition *(Dérivation de composée de fonctions)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles ouverts I et J et telles que $\mathcal{I}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et on a pour tout $x \in I$

$$(g \circ f)'(x) = \text{.................................}$$

Corollaire *(Dérivation de l'application réciproque)*
Soient $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. . . . .
. . . .

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \text{.................................}$$

Définition *(Tangente en un point)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$ est donnée par

$$y = \text{.................................}$$

1.6 Étude des variations d'une fonction

Proposition *(Sens de variation d'une fonction)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$...
2. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$...
3. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow$...
4. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) > 0 \Rightarrow$...
5. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) < 0 \Rightarrow$...

Remarque ....
....
....

1.7 Convexité et concavité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

. *f est **convexe** sur I si elle vérifie*

....

. *f est **concave** sur I si* ....

Remarque *Graphiquement, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tous points A et B appartenant au graphe de f, le graphe de f entre A et B est en dessous du segment $[A, B]$. Pour une fonction concave, c'est le contraire : le graphe est au dessus du segment $[A, B]$.*

Proposition *(Critère de convexité)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est dérivable sur un l'intervalle ouvert I, on note f'' sa dérivée.
. Si $f'' \geqslant 0$ sur I alors ....
. Si $f'' \leqslant 0$ sur I alors ....

Proposition *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*
. f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ ....
. f est concave sur I $\Leftrightarrow$ ....

Remarque *Cette proposition nous dit que si f est dérivable et convexe, le graphe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes alors que si elle est concave, le graphe est au-dessous de chacune de ses tangentes.*

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonction polynomiale

Définition *Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \text{..}, \end{array}$$

est appelée fonction polynôme de degré n. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ donné par

$$\begin{array}{rcl} P' : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=1}^{n} k \times a_k x^{k-1} = \text{..} \end{array}$$

Remarque *La dérivée de $P(x) = x^k$ est donc $P'(x) =$* ....

Définition *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n.* . . . .
. . . .

Exemple *Le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + x - 2$ admet-il des racines ?* . . . .
. . . .

Proposition *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n. Alors :*
. ...
. ...

Remarque *Lorsque $n = 2$, si $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors une factorisation de P est $P(x) =$* ....

Exemple *1 et -2 sont racines du polynôme P défini par $P(x) = x^2 + x - 2$, ainsi $P(x)$ est divisible par* .... *et* ...., *une factorisation est $P(x) =$* ....

2.2 Fonction logarithme

Définition *On appelle logarithme népérien l'unique fonction* . . . .

. . . .

Propriétés *(Règles de calcul)*
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\ln(ab) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln(a^n) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{1}{a}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{1}{a^n}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Proposition *(Limites usuelles)*

$$\begin{aligned}
.\lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= \ldots\ldots\ldots \\
.\lim_{x\to +\infty} \ln(x) &= \ldots\ldots\ldots \\
.\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Théorème *L'application logarithme est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$ *et vérifie* . . . .

2.3 Fonction exponentielle

Définition *La fonction exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ . . . .

. . . .

Remarque *On utilisera la notation* $\exp(x) = e^x$. *Comme elle est la réciproque de la fonction logarithme, on en déduit que la fonction exponentielle vérifie*

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriétés *(Règles de calcul)*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
e^0 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
e^{x+y} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
e^{-x} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
e^{nx} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
e^{-nx} = (e^x)^{-n} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Proposition *(Limites usuelles)*

$$\begin{aligned}
.\lim_{x\to -\infty} e^x &= \ldots\ldots \\
.\lim_{x\to +\infty} e^x &= \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Théorème *La fonction exponentielle est une bijection continue, dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie* . . . .

Définition *Soit $a > 0$.* . . . .

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \ldots.. & \to & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x & \mapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

qui est une fonction .... *sur $\mathbb{R}$.*

2.4 Fonctions puissances et leurs réciproques

Définition *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.* . . . .

. . . .

. . . .

Proposition *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
L'application : $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ *est* . . . .

. . . .

(respectivement strictement décroissante si $\alpha < 0$) et admet pour réciproque l'application . . . .

. . . .

Remarque *Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, la réciproque de l'application $x \mapsto x^n$ est l'application* . . . . *appelée* ***racine n-ième****.* . . . .

. . . .

2.5 Croissances comparées

Proposition $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots.$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots\ldots$

Preuve. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

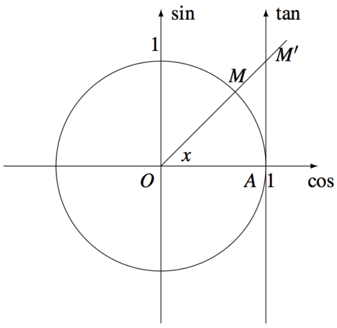
. . . . ■

Proposition *Si $b > 0$ alors* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = ...$ *et* $\lim_{x \to 0^+} x^b \ln(x) = ...$

Preuve. ....
....
....
....
....
....
....
.... ■

2.6 Fonctions trigonométriques et leurs réciproques

$\cos(x)$ = ...
$\sin(x)$ = ...
$\tan(x)$ = ...

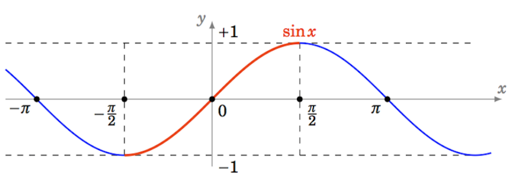


θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$					
$\sin(\theta)$					

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBM : ....

Propriétés *La fonction sinus* $\sin : ..... \to ....$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*

. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = ...$
. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = ...$ *(elle est ....).*
. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = ...$ *(elle est ....).*
. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x + y) = ...$
. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \sin(x - y) = ...$



Remarque *Graphiquement, on voit que la fonction sinus n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$*, elle n'est donc pas bijective.*

Proposition *La fonction sinus* $\sin : .... \to ....$ *est bijective.*

Définition *On appelle fonction **arccsinus**, notée* arcsin : .... → ...., *l'application réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Remarque *Par définition, pour tout* $y \in [-1,1]$, $\arcsin(y)$ *est l'unique angle compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *tel que son sinus soit égal à* y. *Ceci nous donne la relation suivante :*

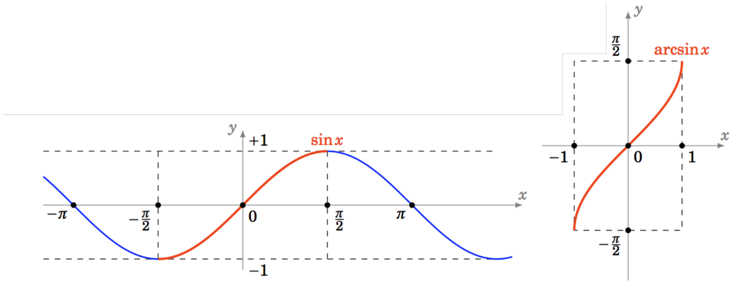
Exemple d'application : Que vaut $\arcsin(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arcsin(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \text{...}$$

Par identification, $\theta =$ ......

Propriétés *La fonction arcsinus est continue et bijective de* $[-1,1]$ *dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifie :*

. $\arcsin(\sin(x)) =$ ....
. $\sin(\arcsin(y)) =$ ....
. $\arcsin(-y) =$ ....
. $\arcsin'(y) =$ ....

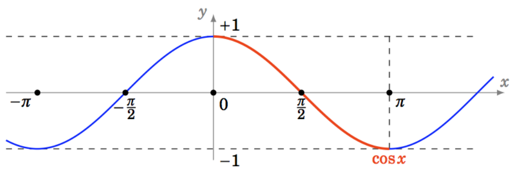


Exemple d'application : Que vaut $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3}))$?

....
....
....
....
....
....

Propriétés *La fonction cosinus* cos : .... → .... *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*

. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) =$ ....
. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) =$ .... *(elle est ....).*
. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) =$ .... *(elle est ....).*
. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x - y) =$ ....
. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x + y) =$ ....



Remarque *Graphiquement, on voit que la fonction cosinus n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$, *elle n'est donc pas bijective.*

Proposition *La fonction* $\cos :$ .... $\to$ .... *est bijective.*

Définition *On appelle fonction* ***arccosinus****, notée* $\arccos :$ .... $\to$ ...., *l'application réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

Remarque *Par définition, pour tout* $y \in [-1, 1]$, $\arccos(y)$ *est l'unique angle compris* 0 *et* π *tel que son cosinus soit égal à* y. *Ceci nous donne la relation suivante :*

Exemple d'application : Que vaut $\arccos(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \text{..}$$

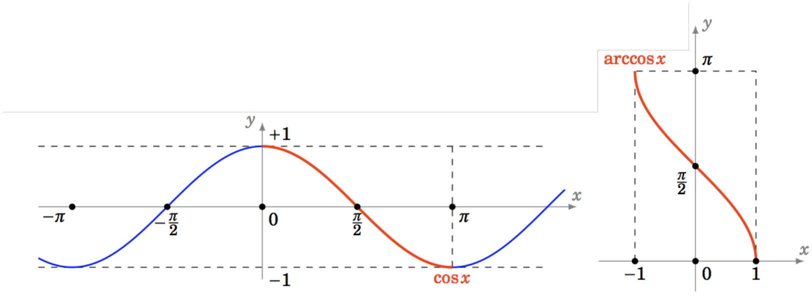
Par identification, $\theta =$ ......

Propriétés *La fonction arccosinus est continue et bijective de* $[-1, 1]$ *dans* $[0, \pi]$, *dérivable sur* $]-1, 1[$ *et vérifie :*

. $\arccos(\cos(x)) =$ ....

. $\cos(\arccos(y)) =$ ....

. $\arccos'(y) =$ ....



Exemple d'application : Que vaut $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3}))$?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition *Les fonctions arcsinus et arccosinus sont liées par la relation suivante*

Preuve. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Propriétés *La fonction tangente* $\tan : D_{\tan} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $\tan(x) = \underline{\qquad\quad}$ *avec*

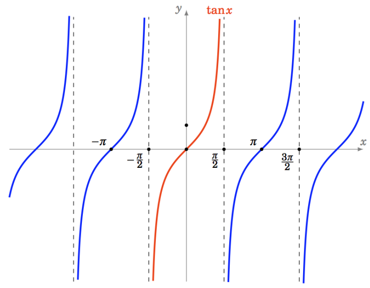
$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \ \dots\dots\dots\dots\dots\} = \Big\{x \in \mathbb{R} : \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big\}.$$

Elle est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ *et vérifie :*

. $\forall x \in D_{\tan}, \tan'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

. $\forall x, -x \in D_{\tan}, \tan(-x) = \dots\dots\dots\dots\dots$ *(elle est ....).*

. $\forall x \in D_{\tan}, \tan(x+\pi) = \dots\dots\dots\dots\dots$ *(elle est ....).*



Remarque *Graphiquement, on voit que la fonction tangente n'est pas injective sur son domaine de définition, elle n'est donc pas bijective.*

Proposition *La fonction tangente* $\tan : \dots\dots\dots\dots\dots \to \dots\dots$ *est bijective.*

Définition *On appelle fonction* ***arctangente****, notée* $\arctan : \dots\dots \to \dots\dots\dots\dots\dots$*, l'application réciproque de la fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$*.*

Remarque *Par définition, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*,* $\arctan(y)$ *est l'unique angle compris (strictement) entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *tel que sa tangente soit égale à* y*. Ceci nous donne la relation suivante :*

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

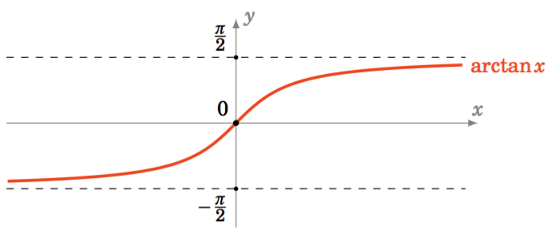
Propriétés *La fonction arctangente est continue, bijective et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et vérifie :*

. $\arctan(\tan(x)) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

. $\tan(\arctan(y)) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

. $\arctan(-y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

. $\arctan'(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



Exemple : En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \big\{y \in \mathbb{R} : y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2.7 Fonctions hyperboliques directes et leurs réciproques

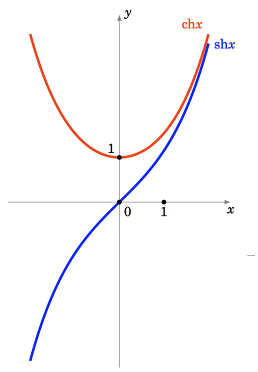
Définitions *On appelle fonction sinus hyperbolique, notée ...., la fonction définie par*

$$\operatorname{sh} x = \underline{\hspace{3cm}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On appelle fonction cosinus hyperbolique, notée ...., la fonction définie par

$$\operatorname{ch} x = \underline{\hspace{3cm}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés



1. *La fonction sinus hyperbolique est continue sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*
   - sh *est* ....
   - $\operatorname{sh}(-x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. *La fonction cosinus hyperbolique est continue sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*
   - ch *est* ....
   - $\operatorname{ch}(-x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définitions *On appelle fonction* . . . .

. . . .

On appelle fonction . . . .

. . . .

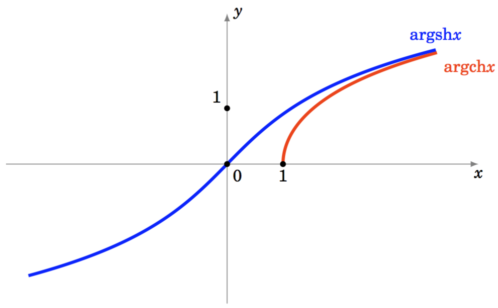
Remarque *Par ces définitions, on a*

et

Propriétés

1. *La fonction argument sinus hyperbolique est continue et bijective de ...... dans ...... et vérifie :*
   . $\text{argsh}(-y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \forall y \in \mathbb{R}$.

   . $\text{argsh}(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \forall y \in \mathbb{R}$.



2. *La fonction argument cosinus hyperbolique est continue et bijective de .... dans ...... et vérifie :*

   . $\text{argch}(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \forall y \in [1, +\infty[$.

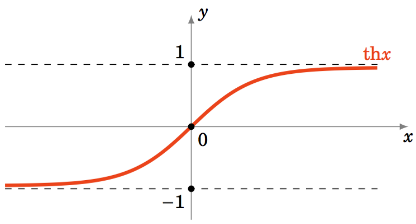
Définition *On appelle fonction tangente hyperbolique, notée ...., la fonction définie par*

$$\text{th}\, x = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés *La fonction tangente hyperbolique est continue sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie :*

. th *est* ....

. $\text{th}(-x) = \ldots\ldots\ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

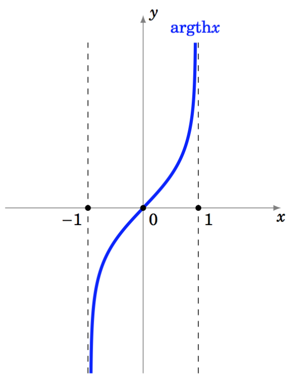


Définition *On appelle fonction* . . . .

. . . .

Remarque *Par cette définition, on a*

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$



Propriétés *La fonction argument tangente hyperbolique est continue et bijective de .... dans ...... et elle vérifie :*

. $\text{argth}(-y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \forall y \in]-1, 1[$.

. $\text{argth}(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ \forall y \in]-1, 1[$.

Proposition *Les fonctions* sh, ch *et* th *sont reliées par les relations suivantes,* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\text{ch}\, x + \text{sh}\, x &= \ldots.. \\
\text{ch}\, x - \text{sh}\, x &= \ldots.. \\
\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \ldots.. \\
1 - \text{th}^2 x &= \frac{\quad}{\quad}.
\end{aligned}$$