Chapitre 2 : Fonctions usuelles et leurs réciproques

Caroline Bauzet*

1er octobre 2021

Table des matières

1 Fonction polynomiale

Définition 1 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rrcl} P: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

est appelée fonction polynôme de degré n.

Définition 2 *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine ou un zéro de P si et seulement si* . . . .

Exemple 3 *Le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + x - 2$ admet-il des racines ? On calcule son discriminant $\Delta =$*. . . . .

On a donc . . . .

*. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

Proposition 4 *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n. Alors :*

- *P possède au plus ..... racines.*
- *$\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de $P \Leftrightarrow$ ....*

Remarque 5 *Lorsque $n = 2$, si $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors une factorisation de P est $P(x) =$ ....*

Exemple 6 *1 et -2 sont racines du polynôme P défini par $P(x) = x^2 + x - 2$, ainsi $P(x)$ se factorise par .... et ...., une factorisation est $P(x) =$ ....*

2 Fonctions logarithme et exponentielle

Définition 7 *On appelle logarithme népérien l'unique fonction* $\ln :$ .... $\to$ .... *dérivable sur .... et vérifiant* $\forall x \in$ ...., $\ln'(x) =$ ....

Propriétés 8 *(Règles de calcul)*
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned}
\ln(ab) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln(a^n) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{1}{a}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ln\left(\frac{1}{a^n}\right) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Théorème 1 *L'application logarithme est une bijection de .... dans ....*

Preuve. La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I =$ .... et sa dérivée est strictement positive sur I, ln est donc strictement croissante sur I er par théorème elle est donc .... sur I. Comme $\mathfrak{I}(\ln) =$ .... on en déduit que ln est à valeurs dans son .... et par théorème elle est donc surjective. **Conclusion :** comme ln est injective et surjective, on en déduit qu'elle est bijective. ■

Définition 9 *La fonction exponentielle notée* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est définie comme la réciproque de l'application logarithme* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Remarque 10 *On utilisera pour tout x dans $\mathbb{R}$ la notation* $\exp(x) = e^x$. *Comme elle est la réciproque de la fonction logarithme, on en déduit que la fonction exponentielle est bijective et vérifie*

....

Propriétés 11 *(Règles de calcul)*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} e^0 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{x+y} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{-x} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{nx} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{-nx} = (e^x)^{-n} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Définition 12 *Soit $a > 0$. On définit la fonction exponentielle de base a par*

$$\begin{aligned} \exp_a : \ldots.. &\to \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x &\mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

3 Fonctions puissances et leurs réciproques

Définition 13 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé. La fonction $u : \ldots\ldots\ldots\ldots \to \ldots\ldots\ldots\ldots$ définie par $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ pour tout $x > 0$ s'appelle fonction puissance α.*

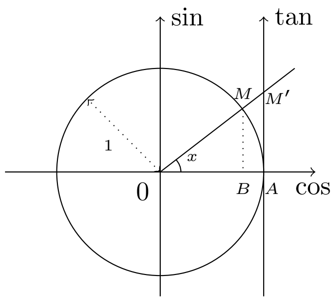
Proposition 14 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.*
L'application u: $\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ est une bijection strictement croissante si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et strictement décroissante si $\ldots\ldots\ldots\ldots$ Elle admet pour réciproque l'application u^{-1}: $\begin{array}{ccc} \ldots\ldots\ldots\ldots & \longrightarrow & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots \end{array}$

Remarque 15 *Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, la réciproque de l'application puissance n notée $x \mapsto x^n$ est l'application $x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ appelée **racine n-ième**. Lorsque n est pair, elle est définie de $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dans $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et lorsque n est impair, elle est définie de $\ldots\ldots\ldots\ldots$ dans $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$*

4 Fonctions trigonométriques et leurs réciproques

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tan(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$



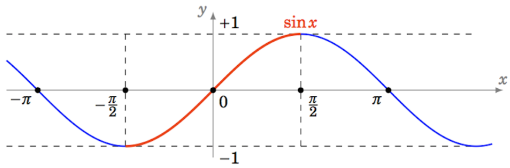
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$					
$\sin(\theta)$					

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBM : ....

....

Propriétés 16 *La fonction sinus* $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *vérifie :*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) =$........................*(elle est impaire).*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) =$.....................*(elle est 2π-périodique).*
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x+y) =$ ....
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x - y) =$ ....
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) =$ ....



Exemple 17 $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2k\pi) = \sin(x + 2(k-1)\pi + 2\pi) = \sin(x + 2(k-1)\pi) = \sin(x)$. *Ceci montre que pour tout k dans $\mathbb{Z}$ la fonction sinus est $2k\pi$-periodique.*

Remarque 18 *Graphiquement, on voit que la fonction sinus n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car* ....

....

elle n'est donc pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.

Proposition 19 *La fonction sinus* $\sin :$ .... $\to$ .... *est bijective.*

Définition 20 *On appelle fonction* ***arccsinus****, notée* $\arcsin :$ .... $\to$ ...., *l'application réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Remarque 21 *Par définition, pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que son sinus soit égal à y. Ceci nous donne la relation suivante :*

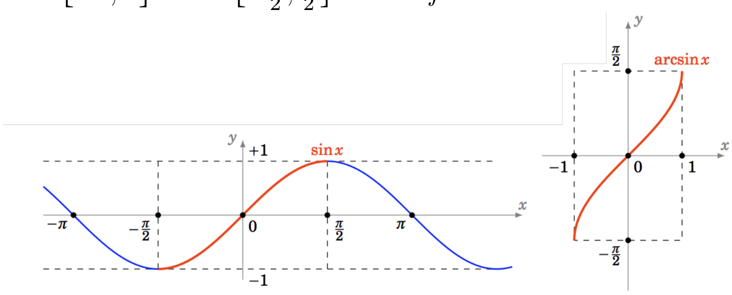
Exemple d'application : Que vaut $\arcsin(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arcsin(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \text{..}$$

Par identification, $\theta =$ ......

Propriétés 22 *La fonction arcsinus est bijective de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et vérifie :*

- $\arcsin(\sin(x)) =$ ....
- $\sin(\arcsin(y)) =$ ....
- $\arcsin(-y) =$ ....



Exemple d'application : Que vaut $\arcsin(\sin(\frac{13\pi}{3}))$? ....

....

....

....

....

....

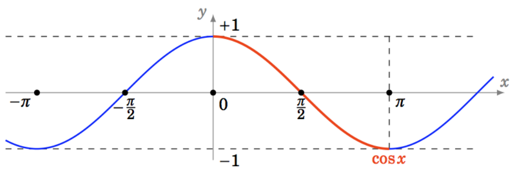
....

....

....

Propriétés 23 *La fonction cosinus* $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *vérifie :*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) =$.....................*(elle est paire).*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) =$ ....*(elle est 2π-périodique).*
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x - y) =$ ....
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x + y) =$ ....
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) =$ ....



Remarque 24 *Graphiquement, on voit que la fonction cosinus n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$*. En effet,* $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2})$ *et* $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$*. Elle n'est donc pas bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1, 1]$*.*

Proposition 25 *La fonction* $\cos :$ .... $\to$ .... *est bijective.*

Définition 26 *On appelle fonction **arccosinus**, notée* $\arccos :$ .... $\to$ ...., *l'application réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$*.*

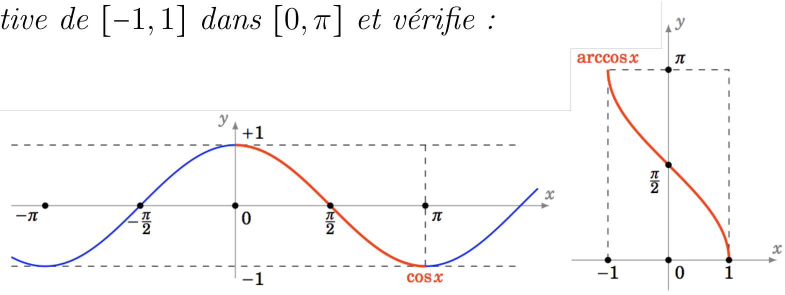
Remarque 27 *Par définition, pour tout* $y \in [-1, 1]$*,* $\arccos(y)$ *est l'unique angle compris* 0 *et* π *tel que son cosinus soit égal à* y*. Ceci nous donne la relation suivante :*

Exemple d'application : Que vaut $\arccos(\frac{1}{2})$?
Par définition,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \text{...}$$

Par identification, $\theta =$ ......

Propriétés 28 *La fonction arccosinus est bijective de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$ *et vérifie :*



- $\arccos(\cos(x))$ = ...
- $\cos(\arccos(y))$ = ...

Exemple d'application : Que vaut $\arccos(\cos(\frac{13\pi}{3}))$? . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

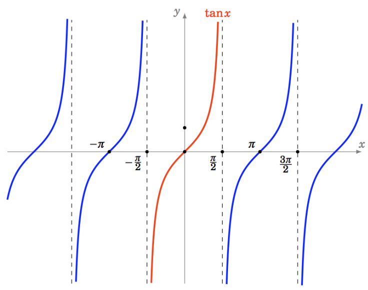
. . . .

. . . .

Propriétés 29 *La fonction tangente* $\tan : D_{\tan} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $\tan(x) = \underline{\hspace{3cm}}$ *avec*

$$D_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Elle vérifie :



- $\forall x, -x \in D_{\tan},\ \tan(-x) =$ .... *(elle est impaire).*
- $\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x+\pi) =$ .... *(elle est ...... périodique).*
- $\forall x \in D_{\tan},\ 1 + \tan^2(x) = \underline{\hspace{3cm}}$

Remarque 30 *Graphiquement, on voit que la fonction tangente n'est pas injective sur son domaine de définition. En effet,* $\tan(0) = \tan(\pi)$ *et* $0 \neq \pi$. *Elle n'est donc pas bijective de* $D_{\tan}$ *vers* $\mathbb{R}$.

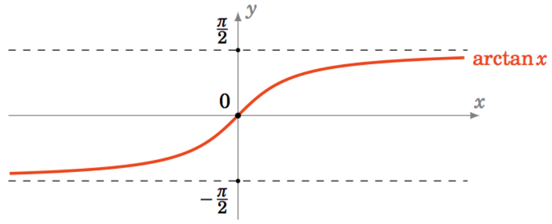
Proposition 31 *La fonction tangente* $\tan :$ .... $\to$ .... *est bijective.*

Définition 32 *On appelle fonction* ***arctangente****, notée* $\arctan :$ .... $\to$ ...., *l'application réciproque de la fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Remarque 33 *Par définition, pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ *est l'unique angle compris (strictement) entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *tel que sa tangente soit égale à* y. *Ceci nous donne la relation suivante :*

Propriétés 34 *La fonction arctangente est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie :*

- $\arctan(\tan(x)) =$ ....
- $\tan(\arctan(y)) =$ ....
- $\arctan(-y) =$ ....



Exemple : En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} : y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Considérons $x \in]-\pi, \pi[$ et posons $t = \tan(\frac{x}{2})$. On a alors $\frac{x}{2} \in$. . . . .

$\arctan(t) = \arctan(\tan(\frac{x}{2})) =$. . . . .

et donc $\cos(x) = \cos$. . . . .

. . . .

Remarque 35 *Voici quelques valeurs remarquables à connaitre :*

y	-1	0	1
$\arccos(y)$			
$\arcsin(y)$			
$\arctan(y)$			

5 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

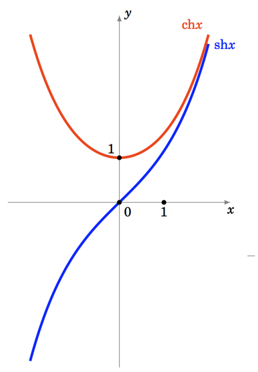
Définitions 36 *On appelle fonction sinus hyperbolique, notée ....* *la fonction définie par*

$$\operatorname{sh} x = \underline{\qquad\qquad\qquad}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On appelle fonction cosinus hyperbolique, notée. .... *la fonction définie par*

$$\operatorname{ch} x = \underline{\qquad\qquad\qquad}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés 37



1. *La fonction sinus hyperbolique vérifie :*
   - sh *est bijective de* .... *dans* ....
   - $\operatorname{sh}(-x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. *La fonction cosinus hyperbolique vérifie :*
   - ch *est bijective de* .... *dans* ....
   - $\operatorname{ch}(-x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définitions 38 *On appelle fonction argument sinus hyperbolique notée ....*

(ou argsinh) la réciproque de l'application $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On appelle fonction argument cosinus hyperbolique notée. ....

(ou argcosh) la réciproque de l'application $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.

Remarque 39 *Par ces définitions, on a*

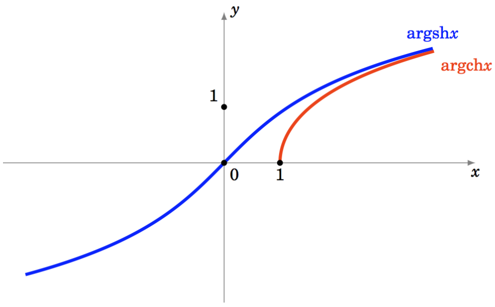
$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

et

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Propriétés 40

1. *La fonction argument sinus hyperbolique est bijective de ...... dans ...... et vérifie :*
   - $\operatorname{argsh}(-y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
   - $\operatorname{argsh}(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $\forall y \in \mathbb{R}$.



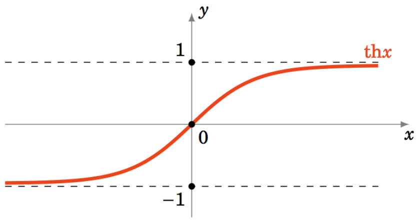
2. *La fonction argument cosinus hyperbolique est bijective de .... dans ...... et vérifie :*
   - $\operatorname{argch}(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $\forall y \in [1, +\infty[$.

Définition 41 *On appelle fonction tangente hyperbolique, notée .... (ou tanh) la fonction définie par*

$$\operatorname{th} x = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

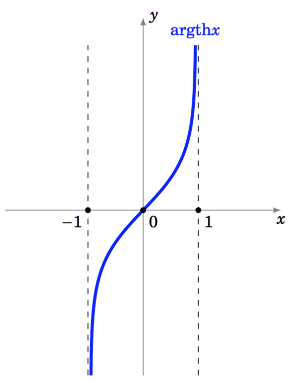
Propriétés 42 *La fonction tangente hyperbolique vérifie les propriétés suivantes :*

- th *est bijective de* .... *dans* ....
- $\operatorname{th}(-x) = \dots\dots\dots\dots$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Définition 43 *On appelle fonction argument tangente hyperbolique notée .... (ou argtanh) l'application réciproque de la fonction* $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

Remarque 44 *Par cette définition, on a*



Propriétés 45 *La fonction argument tangente hyperbolique est bijective de .... dans .... et vérifie :*

- $\operatorname{argth}(-y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $\forall y \in]-1, 1[$.
- $\operatorname{argth}(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $\forall y \in]-1, 1[$.

Proposition 46 *Les fonctions* sh, ch *et* th *sont reliées par les relations suivantes,* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &= \ldots.. \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &= \ldots.. \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \ldots.. \\ 1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{\quad}{\quad}. \end{aligned}$$

A Récapitulatif : domaines de définition et d'injectivité

Fonction	Domaine de définition	Domaine d'injectivité	Image
cos			
sin			
tan			
arccos			
arcsin			
arctan			
sh			
ch			
th			
argch			
argsh			
argth			