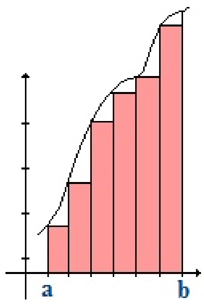
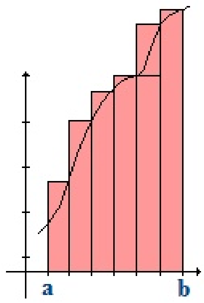
Chapitre 3 : Intégrales et primitives

1 Intégrales et primitives

1.1 Quelques mots sur l'intégrale

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. On cherche à calculer l'aire $\mathscr{A}$ située en dessous du graphe de f noté $\mathscr{C}_f$ et entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$. Pour ce faire, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessous de la courbe en découpant l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles $[a_n, b_n]$ et on note $\mathscr{A}_n^-$ l'aire obtenue. De la même façon, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessus de la courbe et on note $\mathscr{A}_n^+$ l'aire obtenue :

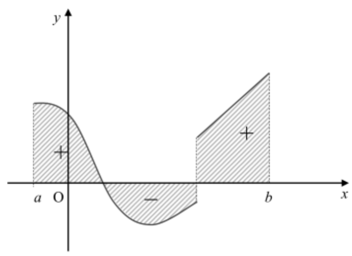




Si la limite des aires en dessous est égale à la limite des aires au dessus lorsque le pas de subdivision de l'intervalle tend vers 0 (càd $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^- = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^+$), on appelle cette limite commune l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ et on la note $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)dx$. On dit alors que f est intégrable sur $[a,b]$.

Remarques
a) Si f prend des valeurs positives et négatives, son intégrale sur $[a,b]$ est égale à la somme des aires que forme son graphe avec l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$ selon la règle suivante : si la forme géométrique est située au dessus de l'axe des abscisses, son aire est comptée positivement alors que si elle est au dessous, l'aire est comptée négativement.
b) Si f est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \text{.............................}$$



Propriétés *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable et on a*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \text{...}$$

2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et on a*

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \text{.............................}$$

3. *Si $f \geqslant g$ alors*

....

4. Pour tout $c \in]a,b[$, f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \text{..}$$

Remarques

- *Deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*
- ***Attention :*** $\int_a^b f(t) \times g(t)dt \neq$ ....
- *Pour toute fonction f et tout réel a on pose par convention* $\int_a^a f(t)dt =$ ....
- *Si f est intégrable sur $[a,b]$, on pose* $\int_a^b f(t)dt =$ ....
- *Grâce à ces deux conventions, on obtient la formule d'addition, dite relation de Chasles :*

$$\forall x, y, z \in [a,b], \quad \int_x^z f(t)dt = \text{..}$$

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité suivant :

Théorème *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* ....

Remarque *(Autre critère) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* ....

1.2 Primitives : définitions et notations

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

. Si I est un intervalle ouvert, une primitive de f est . . . .
. . . .

. Si $I = [a,b[,]a,b]$ ou $[a,b]$, une primitive de f est . . . .
. . . .

Remarque *Si F est une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, toute primitive G de f sur I est de la forme :*

$$\begin{array}{rcl} G : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + c, \end{array}$$

où c est un réel quelconque. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Théorème *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.* . . . .
. . . .

$$F(x) = \text{...}$$

. . . .

Remarque *Ce théorème nous dit que toute fonction continue sur I possède des primitives. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

1.3 Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Domaine de validité**
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}},$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Fonction	**Primitive**
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'\big(1 + \tan^2(u)\big)$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

1.4 Outils et techniques de calcul

1.4.1 Primitives évidentes

Lorsque l'on cherche la primitive d'une fonction, on commence par regarder si celle-ci ne s'écrit pas sous la forme $u'(x) \times f(u(x))$, avec $f(u(x))$ égale à l'une des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u^{\alpha}(x),\ \frac{1}{\sqrt{u(x)}},\ \frac{1}{u(x)},\ e^{u(x)},\ \cos(u(x)),\ \sin(u(x)),\ 1+\tan^2(u(x)),\ \frac{1}{\cos^2(u(x))},\ \frac{1}{1+u^2(x)},\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}},$$

puis on se réfère au tableau des primitives usuelles.

Exemples *Donner une primitive des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = (x+1)^4 = u'(x) \times (u(x))^4$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_1(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. $f_2(x) = (4x+1)^2 = \ldots\ldots\ldots(4x+1)^2 = \ldots\ldots u'(x) \times (u(x))^2$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. $f_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_4(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. $f_5(x) = (6x+1)e^{3x^2+x} = u'(x)e^{u(x)}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_5(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. $f_6(x) = 3xe^{5x^2} = — \times 10xe^{5x^2} = \ldots\ldots u'(x)e^{u(x)}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_6(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. $f_7(x) = 4x\cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cos(x^2+3) = \ldots\ldots u'(x)\cos(u(x))$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_7(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. $f_8(x) = (2x-3)\sin(x^2-3x+1) = u'(x)\sin(u(x))$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_8(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. $f_9(x) = \dfrac{12x+2}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_9(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{3}{1+4x^2} = \ldots.\times \dfrac{1}{1+(2x)^2} = \ldots.\times \dfrac{2}{1+(2x)^2} = \ldots.\times \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{10}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. $f_{11}(x) = \dfrac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{11}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

12. $f_{12}(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+4x} = \ldots. \times \dfrac{x+2}{x^2+4x} = \ldots. \times \dfrac{2x+4}{x^2+4x} = \ldots. \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots.$, *a pour primitive*

$$F_{12}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

13. $f_{13}(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-9x^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1-(\ldots..)^2}} = \ldots.. \times \dfrac{}{\sqrt{1-(\ldots..)^2}} = \ldots.. \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots.$, *a pour primitive*

$$F_{13}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

14. $f_{14}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}}$

$= 2 \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots.$, *a pour primitive*

$$F_{14}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

15. $f_{15}(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}} = \ldots\ldots.\times \dfrac{\ldots.}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad}}$

$= \ldots. \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots..$, *a pour primitive*

$$F_{15}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

16. $f_{16}(x) = \dfrac{7}{9x^2+12x+5} = \dfrac{7}{\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{7}{\qquad\qquad\qquad}$

$= \ldots.. \times \dfrac{\ldots..}{\qquad\qquad\qquad} = \ldots.. \times \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots..$, *a pour primitive*

$$F_{16}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

17. $f_{17}(x) = \dfrac{5x}{x^4+6x^2+10} = \dfrac{5x}{\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{5x}{\qquad\qquad\qquad} = \ldots.. \times \dfrac{\ldots..}{\qquad\qquad\qquad}$

$= \ldots.. \times \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots..$, *a pour primitive*

$$F_{17}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

18. $f_{18}(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{4x^3+12x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *avec* $u(x) = ...$*, a pour primitive*

$F_{18}(x) = ...$

19. $f_{19}(x) = \dfrac{5x}{9x^4-12x^2+5} = \dfrac{5x}{\rule{8cm}{0.4pt}} = \dfrac{5x}{\rule{7cm}{0.4pt}} = ...\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ *avec* $u(x) = ...$*, a pour primitive*

$$F_{19}(x) = ...$$

1.4.2 Intégration par parties

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. On sait que $(uv)' = u'v + v'u$, on en déduit alors la formule dite « d'intégration par parties » :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = ...$$

ou, pour une intégrale indéfinie :

$$\int u(x)v'(x)dx = ...$$

Exemples

1. *Calculer* $\int_0^1 xe^x dx$*. On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$*, de cette façon,* $u'(x) = ...$ *et* $v(x) = ...$ *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[0,1]$*,* u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\int_0^1 xe^x dx = ...$$

2. *Calculer* $\int_1^e x\ln(x)dx$*. On pose* $u(x) = \ln(x)$ *et* $v'(x) = x$*, alors* $u'(x) = ...$ *et* $v(x) = ...$ *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[1,e]$*,* u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)dx &= ....\\ &= ....\\ &= ....\\ &= ....\\ &= ....\end{aligned}$$

3. *Calculer* $\int \arcsin(x)dx$. *On pose* $u(x) = \arcsin(x)$ *et* $v'(x) = 1$, *alors* $u'(x) = \overline{}$ *et* $v(x) = ...$

   Les fonctions u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $]-1,1[$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x)dx &= \text{...} \\ &= \text{...} \\ &= \text{...} \\ &= \text{...} \\ &= \text{...} \end{aligned}$$

4. *Donner une primitive de* $f : x \mapsto x^2e^x$ *sur* $\mathbb{R}$. *On pose* $u(x) = ...$ *et* $v'(x) = ...$, *de cette façon,* $u'(x) = ...$ *et* $v(x) = ...$ *On a*

$$\int x^2e^xdx = \text{...}$$

   L'astuce pour calculer cette intégrale qui contient une exponentielle consiste à refaire une intégration par parties pour calculer

$$\begin{aligned} \int xe^xdx &= \text{...} \\ &= \text{...} \end{aligned}$$

   d'où

$$\int x^2e^xdx = \text{...}$$

   Une primitive de f *sur* $\mathbb{R}$ *est donc* $F : x \mapsto$ ....

1.4.3 Changement de variable

Théorème *Soient* f *une fonction* .... *définie sur un intervalle* I *et* $\varphi : J \to I$ *une* ....

.... *telle que* φ' *soit* .... *Pour tout* $a, b \in J$, *on a*

....

Autrement dit, si F *est une primitive de* f, *alors* .... *est une primitive de* ....

Voici en pratique comment on applique ce théorème :

Exemples

1. *Calculer* $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ *en posant* $t=x^2$. *Comme* $x \mapsto x^2$ *est bijective, continue et dérivable de .... vers ...., ce changement de variable est donc admissible. On procède par étapes :*
   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x=0$, *alors* $t=....$ *et si* $x=1$ *alors* $t=....$
   . *La variable d'intégration : comme* $t=x^2$, *par dérivation,* $dt=..........$
   . *L'intégrale : on a*

   $$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx = ... \int_0^1 \frac{2x}{1+\left(....\right)^2}dx = ... \int_{...}^{...} \frac{\quad}{1+....} = ...$$

2. *Calculer* $\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx$ *en posant* $t=e^x$. *Comme* $x \mapsto e^x$ *est bijective, continue et dérivable de .... vers ...., ce changement de variable est donc admissible.*
   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x=0$, *alors* $t=....$ *et si* $x=1$ *alors* $t=.....$
   . *La variable d'intégration : comme* $t=e^x$, *par dérivation,* $dt=..........$
   . *L'intégrale : on a*

   $$\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x(e^x+e^{-x})}dx = 2\int_0^1 \frac{..........}{\left(......\right)^2+1} = 2\int_{...}^{...} \frac{...}{\qquad} = ...$$

   $$=...$$

3. *Calculer* $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$ *en posant* $t=\sqrt{1+x}$. *Comme* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ *est bijective, continue et dérivable de .... vers ...., ce changement de variable est donc admissible.*
   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x=3$, *alors* $t=....$ *et si* $x=8$ *alors* $t=....$
   . *La variable d'intégration : comme* $t=\sqrt{1+x}$, *par dérivation,* $dt=.................$
   . *Comme* $t=\sqrt{1+x}$, *on a* $x=...............$
   . *L'intégrale : on a*

   $$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = ... \int_3^8 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx = ... \int_{....}^{....} \frac{\qquad}{\qquad} = ... \int_{....}^{....} \frac{\qquad}{\qquad}.$$

   Pour calculer cette intégrale, on va décomposer $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ *en éléments simples : on cherche* $a,b \in \mathbb{R}$ *tels que*

   $$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{\qquad}{(t-1)(t+1)} = \frac{\qquad}{(t-1)(t+1)},$$

   ce qui amène à

   $$\begin{cases} a+b &= .... \\ a-b &= .... \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= .... \\ b &= .... \end{cases}$$

   Finalement

   $$\begin{aligned} 2\int_2^3 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} &= 2\int_2^3 \frac{1}{....(t-1)}dt - 2\int_2^3 \frac{1}{....(t+1)}dt \\ &= .... \\ &= .... \\ &= .... \\ &= .... \end{aligned}$$

4. *Calculer* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx$ *en posant* $t = \sin(x)$*. Comme* $x \mapsto \sin(x)$ *est bijective, dérivable et continue de .... vers ...., ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = -\pi/4$*, alors* $t =$ .... *et si* $x = \pi/4$ *alors* $t =$ ....

   . *La variable d'intégration : comme* $t = \sin(x)$*, on a* $dt =$ ....

   . *L'intégrale : on a* $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad\qquad}$*, on a*

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)dx}{\qquad\qquad} = \int \frac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. *Calculer* $\int_{0}^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ *en posant* $t = 1-x^2$*. Comme* $x \mapsto 1-x^2$ *est bijective, dérivable et continue de .... vers ...., ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$*, alors* $t =$ .... *et si* $x = 1/2$ *alors* $t =$ ....

   . *La variable d'intégration : comme* $t = 1-x^2$*, on a* $dt =$ ....

   . *L'intégrale : on a*

$$\int_{0}^{1/2} \frac{xdx}{(1-x^2)^{3/2}} = \ldots\ldots \int_{0}^{1/2} \frac{-2xdx}{(1-x^2)^{3/2}} = \ldots \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{dt}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.4.4 Intégration de fonctions trigonométriques

On s'intéresse ici aux intégrales de la forme $\int \sin^p(x)\cos^q(x)dx$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On différencie quelques cas selon la parité et le signe de p et q.

a) q impair : On prend pour variable $t =$ .... donc $dt =$ .... en écrivant

$$\int \sin^p(x)\cos^q(x)dx = \int \sin^p(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dx = \int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dt.$$

b) q impair : Même principe qu'en **a)** en posant $t =$ ....

c) $\mathbf{p, q \geqslant 0}$ et pairs : On abaisse le degré en utilisant les formules :

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \text{ et } \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

puis si nécessaire on recommence avec $\sin^2(2x)$ et $\cos^2(2x)$, ou on change de variables.

d) p et q pairs, l'un au moins étant négatif : On prend pour variable $t =$ ...., cette méthode est aussi applicable lorsque p et q sont impairs.

Exemples *Calculer*

1. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

on trouve alors $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx = \int \frac{\qquad\qquad}{\sin^4(x)}\ldots\ldots\ldots.dx = \int \frac{\qquad}{\qquad}dt = -\frac{1}{3\sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)} + C,\ C \in \mathbb{R}.$ *On a posé* $t = \ldots\ldots..$

3. $\displaystyle\int \sin^5(x)\cos^3(x)dx = \frac{\sin^6(x)}{6} - \frac{\sin^8(x)}{8} + C,\ C \in \mathbb{R},$ *en posant* $t = \sin(x)$.

1.4.5 Intégration de fractions rationnelles

Sauf cas particuliers évidents, comme par exemple

$$f(x) = \frac{5x^4 + 2x}{x^5 + x^2 - 1}$$

qui est de la forme .... et qui admet donc pour primitive

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

le calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle exige sa décomposition en partie entière et éléments simples sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'intégration d'une fraction rationnelle, pourvu que l'on sache factoriser son dénominateur, se ramène à celles :

. d'un polynôme (immédiate).

. d'éléments simples de première espèce : $\displaystyle\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, $a, A \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}^*$.

. d'éléments simples de seconde espèce : $\displaystyle\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\beta}$, $p, q, B, C \in \mathbb{R}, p^2 - 4q < 0, \beta \in \mathbb{N}^*$.

a) Intégration d'un élément simple de 1ère espèce

Il s'agit de calculer $\displaystyle F(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :

. Si $\alpha = 1$: $\displaystyle F(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

. Si $\alpha \geqslant 2$: $\displaystyle F(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \int (x-a)^{\cdots\cdots}dx = \frac{(x-a)^{\cdots\cdots\cdots}}{(\ldots\ldots..)} + C = \ldots \frac{1}{\qquad\qquad\qquad} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Exemples *Calculer les primitives suivantes.*

1. $\displaystyle\int \frac{6x+1}{3x^2 + x + 3}dx$. *De la forme* $\frac{\qquad}{\qquad}$ *a pour primitive* .... *Comme* $\forall x \in \mathbb{R}$

$u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > 0$, *on a* $\displaystyle\int \frac{6x+1}{3x^2 + x + 3}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int \frac{4}{(x-2)^2}dx$. *De la forme* ..... $\times \frac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *a pour primitive*

.... $\times \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Intégration d'un élément simple de 2nde espèce

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\alpha}dx,\ A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2-4q<0,\ \alpha \in \mathbb{N}^*$. Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx.$$

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x+1$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur x^2-2x+3 : on a $(x^2-2x+3)' =$ .... et donc

$$x+1 = \text{..}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx &= \text{....}\int \frac{}{(x^2-2x+3)^2}dx + \text{....}\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \\ &= H(x) + G(x).\end{aligned}$$

$H(x)$ est de la forme .... $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = \text{....}\times -\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x) =$ .... donc $H(x) = -\dfrac{1}{\text{....}(x^2-2x+3)}$.

Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On décompose le polynôme au dénominateur x^2-2x+3 en somme d'un carré et d'un reste :

$x^2-2x+3 =$ .... en posant $t =$ ...., on a $x^2-2x+3 =$ ....

$$dt = \text{......} \text{ donc } G(x) = \text{....}\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \text{ devient ....}\int \frac{dt}{\big(\text{...............}\big)^2} = \phi(t).$$

Étape 3 : Calcul de $\phi(t)$: l'idée est d'écrire $(t^2+2)^2$ sous la forme « $c^2\big(\frac{t^2}{c}+1\big)^2$, » où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

$$\phi(t) = 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = 2\int \frac{dt}{\big(2(\frac{t^2}{2}+1)\big)^2} = 2\int \frac{dt}{\text{....}\big(\text{........}+1\big)^2} = \int \frac{dt}{\text{.....}\big(\big(\quad\big)^2+1\big)^2}.$$

On pose alors $\tan(\theta) =$ .... donc $t =$ ...., $dt =$ .... Il en résulte :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int \frac{dt}{\qquad\qquad} \\ &= \int \frac{}{\qquad\qquad} d\theta \\ &= \text{....}\int \frac{}{\qquad\qquad} d\theta \\ &= \text{....}\int \text{.................}d\theta \\ &= \text{....}\int \frac{}{\qquad\qquad} d\theta \\ &= \text{...}\end{aligned}$$

Étape 4 : On retourne à la variable de départ x pour le calcul de $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.
On a posé $t = \sqrt{2}\tan(\theta)$ ce qui donne $\tan(\theta) = \frac{\quad}{\quad}$ et $\theta =$ ....

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}$$

donc

$\phi(t) =$ ....

On obtient finalement comme on a posé $t = x - 1$

$G(x) =$ ....

et donc

$F(x) =$ ....

$=$ ....

Remarque *Si dans l'étape 3 on avait du calculer* $\phi(t) = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \int \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}$

On aurait posé $\theta =$ ....*,* $dt =$ ....*, et*

$$\phi(t) = \int \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \text{..}$$

2 Quelques formules utiles pour le calcul de primitives

$$
\begin{array}{rcll}
\cos^2(x)+\sin^2(x) & = & 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\
1+\tan^2(x) & = & \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\sin^2(x) & = & \dfrac{1-\cos(2x)}{2} & \forall x \in \mathbb{R} \\
\cos^2(x) & = & \dfrac{1+\cos(2x)}{2} & \forall x \in \mathbb{R} \\
\sin(2x) & = & \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} & \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\sin(x) & = & \dfrac{2t}{1+t^2} & \text{avec } t=\tan(\frac{x}{2}),\ x \neq \pi+2k\pi \\
\cos(x) & = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \text{avec } t=\tan(\frac{x}{2}),\ x \neq \pi+2k\pi \\
\tan(x) & = & \dfrac{2t}{1-t^2} & \text{avec } t=\tan(\frac{x}{2}),\ x \neq \pi+2k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\
\sin(\arccos(y)) & = & \sqrt{1-y^2} & \forall y \in [-1,1] \\
\cos(\arcsin(y)) & = & \sqrt{1-y^2} & \forall y \in [-1,1] \\
\sin(\arctan(y)) & = & \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} & \forall y \in \mathbb{R} \\
\cos(\arctan(y)) & = & \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} & \forall y \in \mathbb{R} \\
\tan(\arcsin(y)) & = & \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} & \forall y \in]-1,1[\\
\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x) & = & 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{sh}(2x) & = & 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{ch}(2x) & = & 2\,\mathrm{ch}^2(x)-1 = 1+2\,\mathrm{sh}^2(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{ch}^2(x) & = & \dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2(x)} & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{sh}^2(x) & = & \dfrac{\mathrm{th}^2(x)}{1-\mathrm{th}^2(x)} & \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{sh}(x) & = & \dfrac{2t}{1-t^2} & \text{avec } t=\mathrm{th}(\frac{x}{2}),\ x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{ch}(x) & = & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \text{avec } t=\mathrm{th}(\frac{x}{2}),\ x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{th}(x) & = & \dfrac{2t}{1+t^2} & \text{avec } t=\mathrm{th}(\frac{x}{2}),\ x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y)) & = & \sqrt{y^2-1} & \forall y \in [1,+\infty[\\
\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(y)) & = & \sqrt{y^2+1} & \forall y \in \mathbb{R} \\
\mathrm{sh}(\mathrm{argth}(y)) & = & \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} & \forall y \in]-1,1[\\
\mathrm{ch}(\mathrm{argth}(y)) & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \forall y \in]-1,1[
\end{array}
$$