# Chapitre 3 : Intégrale de Riemann

## Table des matières



Dans tout ce qui suit, on notera $a, b$ deux réels tels que $a < b$.

## 1 Rappels et compléments d'analyse

**Définitions 1** *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

. *On dit que $\alpha$ est la **borne supérieure** de $A$ si* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. *On dit que $\beta$ est la **borne inférieure** de $A$ si* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Remarque 2** *Si* $\sup A$ *existe et appartient à* $A$*, on dit que* $\sup A$ *est le maximum de* $A$ *et on note* $\sup A = \max A$ *(on l'appelle aussi le plus grand élément de* $A$*). De la même façon, si* $\inf A$ *existe et appartient à* $A$*, on dit que* $\inf A$ *est le minimum de* $A$ *et on note* $\inf A = \min A$ *(on l'appelle aussi le plus petit élément de* $A$*).*

**Exemple 3** *On considère l'ensemble* $A = [1,2[$. ..............................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

> **Théorème 4** *Toute partie de* $\mathbb{R}$ ***non vide et majorée*** *admet une borne supérieure. De la même façon, toute partie de* $\mathbb{R}$ ***non vide et minorée*** *admet une borne inférieure.*

**Preuve.** Voir Semestre 1. ■

**Définitions 5** *Soient* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *On dit que* $f$ *est continue sur* $I$ *si :*

  ..........................................................................................

- *On dit que* $f$ *est* <u>*uniformément*</u> *continue sur* $I$ *si :*

  ..........................................................................................

**Remarque 6** *Dans la définition de l'uniforme continuité, le* $\delta$ *est le même pour tous les points* $x_0$ *de* $I$ *alors que dans celle de la continuité, le* $\delta$ *peut varier selon le point* $x_0$ *considéré.*

**Exemple 7** *La fonction* $f : [0,1] \to [0,1]$ *définie par* $f(x) = x^2, \forall x \in [0,1]$ *est uniformément continue sur* $[0,1]$. ..............................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

**Remarque 8** *Si une fonction est uniformément continue alors elle est continue mais la réciproque est fausse. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$*

*car elle vérifie :* ...........................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

**Proposition 9** *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

**Preuve.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que $f$ est $k$-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+^*$ fixé) et montrons que $f$ est uniformément continue. On sait que pour tout $x, x_0 \in I$,

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

............................................................................................. ■

**Remarque 10** *Attention la réciproque de ce résultat est fausse comme nous le montre le contre-exemple suivant que nous traiterons en TD : la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

**Théorème 11** *(Théorème de Heine).* ...........................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

**Preuve.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons par l'absurde $f$ non uniformément continue. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

.............................................................................................. ■

**Théorème 12** *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
*Si $f$ est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors pour tout $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

**Preuve.** Voir Semestre 1. ■

**Proposition 13** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $x_0 \in I$.* ..............................................................................

..............................................................................................

**Preuve.** Voir TD. ■

# 2 L'intégrale de Riemann

## 2.1 Construction

**Définition 14** *On appelle* ***subdivision*** *d'un segment $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante de points de $[a,b]$ dont le premier terme vaut $a$ et le dernier terme vaut $b$. Une subdivision $\sigma$ de $[a,b]$ est donc définie par $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$


**Exemples 15** ..........................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Définition 16** *On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* ***en escalier*** *(ou bien* ***étagée****),* ............

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Remarques 17**

1. *Une fonction constante est évidemment étagée.*
2. *La valeur de $\varphi$ aux points $x_i$ de la subdivision n'est pas imposée. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire, cela n'a pas d'importance.*
3. *Si $\varphi$ est étagée et si $\sigma = (x_0, ..., x_i, ..., x_n)$ est une subdivision adaptée à $\varphi$, il existe donc $n$ réels $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$ tels que $\varphi(x) = \lambda_i$, $\forall x \in ]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.*

4. *On notera $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$.*
5. *Il est évident que si $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$, alors $\varphi$ prend un nombre fini de valeurs. Notons que la réciproque de cette propriété est fausse comme nous le montre la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}} \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1], \\ 1 & \textbf{\textit{si}} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases} \end{array}$$

*$\psi$ prend un nombre fini de valeurs mais $\psi \notin \mathscr{E}([a,b])$.*

**Exemple 18** ........................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Proposition 19** *Soient $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à $\varphi$ avec $\varphi(x) = \lambda_i$, $\forall x \in ]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.* ...............................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Preuve.** Soient $i \in \{0, ..., n-1\}$ fixé arbitrairement et $x' \in ]x_i, x_{i+1}[$. ...............................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

.......................................................................................................... ■

**Remarque 20** *Cette proposition signifie que le réel $I_\sigma(\varphi)$ ne dépend que de la fonction $\varphi$. Plus généralement, en notant $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en considérant tous les points des deux subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$, on peut montrer que $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée à $\varphi$ et*

$$I_{\sigma \cup \sigma'}(\varphi) = I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi).$$

**Définition 21** *Soient $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à $\varphi$ avec $\varphi(x) = \lambda_i$, $\forall x \in ]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Alors le réel*

$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

*s'appelle l'intégrale de $\varphi$ sur $[a,b]$ et est noté $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$.*

**Remarques 22**

- *Chaque terme $\lambda_i(x_{i+1} - x_i)$ correspond à l'aire du rectangle compris entre les abscisses $x_i$, $x_{i+1}$ et de hauteur $\lambda_i$ en comptant ces aires avec un signe « + » si $\lambda_i > 0$ et un signe « - » si $\lambda_i < 0$.*
- *Si $\varphi$ est constante égale à $\alpha \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \alpha \times (b-a)$.*

**Proposition 23** *Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$. Alors*

1. *$\varphi + \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (\varphi+\psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$.*
2. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\displaystyle\int_a^b \alpha\varphi(x)dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)dx$.*
3. *$\displaystyle\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|dx$.*
4. *Si $\varphi \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \geqslant 0$.*
5. *Si $\varphi \geqslant \psi$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \geqslant \int_a^b \psi(x)dx$.*
6. *Si $\varphi$ et $\psi$ diffèrent en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx$.*
7. *Pour tout $c$ de $]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$.*

**Preuve.**

1. Soient $\sigma_1$ et $\sigma_2$ deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées respectivement à $\varphi$ et $\psi$. ...............

   ...........................................................................................

   ...........................................................................................

   ...........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

2. ..........................................................................................
3. En notant $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $\varphi$ et $(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$ les constantes correspondantes, on a

..........................................................................................

..........................................................................................

4. On note $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $\varphi$ et $(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$ les constantes correspondantes. Si $\varphi \geqslant 0$ alors $\forall i \in \{0, ..., n-1\}, \lambda_i \geqslant 0$ et
$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant 0$$
comme somme de réels positifs ou nuls.
5. Si $\varphi \geqslant \psi$ alors on applique 4. à $\varphi - \psi$.
6. Voir TD.
7. ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

■

## 2.2 Critères d'intégrabilité

**Définition 24** *On dit qu'une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* ...........................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

**Remarques 25**

- *Cette définition signifie qu'une fonction* $f$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *s'il existe deux fonctions en escaliers* $\varphi$ *et* $\psi$ *encadrant* $f$ *sur* $[a,b]$ *et dont les intégrales sont arbitrairement voisines.*
- *On dira qu'une telle fonction* $f$ *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$.
- *On a* $\mathscr{E}([a,b]) \subset \mathscr{R}([a,b])$.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction $f \in \mathscr{R}([a,b])$. On introduit les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx, \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leqslant f \right\} \text{ et } B = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx, \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leqslant \psi \right\},$$

autrement dit,

$\alpha \in A \Leftrightarrow$ ..........................................................................................................

et $\beta \in B \Leftrightarrow$ ..........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

.........................................................................................................

L'ensemble $A$ est donc non vide et majoré (par tout élément de $B$) et l'ensemble $B$ est non vide et minoré (par tout élément de $A$). Par conséquent, $A$ admet une borne supérieure notée $\sup A$ et $B$ admet une borne inférieure notée $\inf B$ qui vérifient $\sup A \leqslant \inf B$.

Fixons $\epsilon > 0$. ..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

**Définition 26** *Soient $f \in \mathscr{R}([a,b])$ et les ensembles associés*

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx, \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leqslant f \right\} \text{ et } B = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx, \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } f \leqslant \psi \right\}.$$

*Le nombre $\inf B = \sup A$ s'appelle **l'intégrale de** $f$ sur $[a,b]$ et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.*

**Remarques 27**

*1) Si $f \in \mathscr{E}([a,b])$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est à la fois le plus petit élément de $B$ et le plus grand élément de $A$.*

*2)Si $f \in \mathscr{R}([a,b])$ et $u, U \in \mathscr{E}([a,b])$ sont telles que* ..............................................

..............................................................................................

..............................................................................................

**Théorème 28** ..............................................................................................

..............................................................................................

**Preuve.**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ■

**Théorème 29** *Si $f$ est une fonction monotone sur $[a,b]$ alors $f \in \mathscr{R}([a,b])$.*

**Preuve.** Voir TD. ■

# 3 Valeur moyenne et sommes de Riemann

## 3.1 Valeur moyenne

**Définition 30** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Proposition 31** *(Première formule de la moyenne)*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Preuve.** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

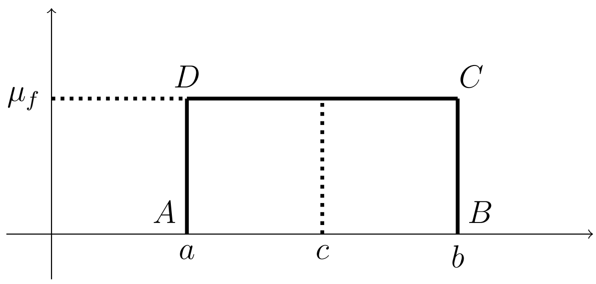
.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

................................................................................................................. ■

**Remarque 32** *L'interprétation géométrique de la valeur moyenne d'une fonction sur un segment* $[a,b]$ *est immédiate. Pour fixer les idées, supposons* $f > 0$ *sur* $[a,b]$*. L'aire du rectangle ABCD de côtés* $AB = b-a$ *et* $AD = \mu_f$ *est égale à l'aire hachurée de la figure ci-dessous :*




**Remarque 33** *On peut montrer que si* $f \in \mathscr{R}([a,b])$ *alors* $f$ *est bornée sur* $[a,b]$ *(voir TD). En notant* $\alpha, \beta$ *un minorant et un majorant de* $f$ *sur* $[a,b]$ *d'après la preuve de la Proposition 31 on a donc*

$$\alpha \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \beta \times (b-a)$$

*sans avoir besoin de l'hypothèse de continuité sur* $f$ *(qui dans la preuve servait à justifier l'intégrabilité de* $f$ *et à montrer l'existence du point* $c$*).*

## 3.2 Sommes de Riemann

**Définition 34** *On considère une subdivision* $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ *de l'intervalle* $[a,b]$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé.*

.................................................................................................................

.................................................................................................................

.................................................................................................................

**Exemple 35** $\sigma = (0, \frac{1}{2}, 1)$ *est une subdivision associée à* $[0,1]$ *et* $\xi = (.......,.......)$ *est un système de points intermédiaires associé à* $\sigma$.

**Définition 36** *Soient* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ *une subdivision de* $[a,b]$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ *un système de points intermédiaires associé à* $\sigma$. ........................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

**Proposition 37** *(Propriété de la moyenne)*
*Si* $f \in \mathscr{R}([a,b])$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

**Remarques 38**

*1) Notons* $\bar{\sigma} = (a, a + \dfrac{b-a}{n}, ..., a + i\dfrac{b-a}{n}, ..., b)$ *une subdivision régulière de* $[a,b]$ *et le système de points intermédiaires associé* $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_{n-1})$ *défini par* $\bar{\xi}_i = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$, $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$. *Cette proposition signifie que* $\dfrac{1}{b-a}\mathscr{S}_n(f, \bar{\sigma}, \bar{\xi})$ *converge vers la valeur moyenne de* $f$ *sur* $[a,b]$. *En effet,*

$$\frac{1}{b-a}\mathscr{S}_n(f, \bar{\sigma}, \bar{\xi}) = \text{.........................................................}$$

$$= \text{.........................................................}$$

$$= \text{.........................................................}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{.........................................................}$$

*2) En pratique, le cas le plus utile est celui où* $a = 0$, $b = 1$. ............................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

*On notera que la limite est évidemment la même pour* $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ *et* $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ *et* $\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right)$.

**Preuve.** Par soucis de clarté, nous allons faire uniquement la preuve dans le cas où $f$ est continue sur $[a,b]$. Nous reprenons l'idée et les notations de la preuve du Théorème 28. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe par uniforme continuité de $f$ un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x_0 \in [a,b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Nous considérons une subdivision régulière $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$, avec $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ et supposons $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. En notant $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, on introduit de nouveau les fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ suivantes

$$\begin{cases} \varphi(x) = m_i \text{ et } \psi(x) = M_i & \text{si} \quad x \in ]x_i, x_{i+1}[ \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \varphi(x) = \psi(x) = f(x) & \text{si} \quad x = x_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1), \end{cases}$$

et nous définissons la fonction $\theta \in \mathscr{E}([a,b])$ par

$$\begin{cases} \theta(x) = f(x_{i+1}) & \text{si} \quad x \in ]x_i, x_{i+1}[ \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \theta(x) = f(x) & \text{si} \quad x = x_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \end{cases}$$

Par définition on a donc $\varphi \leqslant \theta \leqslant \psi$ et alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b \theta(x)dx \leqslant \int_a^b \psi(x)dx$. Comme $\int_a^b \varphi(x)dx$ et $\int_a^b \psi(x)dx$ tendent vers $\int_a^b f(x)dx$ on en déduit que $\int_a^b \theta(x)dx$ aussi et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

■

**Exemple 39** *Calculer la limite de la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$. ......................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# 4 Propriétés de l'intégrale de Riemann

## 4.1 Linéarité, positivité, relation de Chasles

**Proposition 40** *Soient* $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $g \in \mathscr{R}([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

1. $f+g \in \mathscr{R}([a,b])$ *et* $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2. $\lambda f \in \mathscr{R}([a,b])$ *et* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
3. *Si* $f \geqslant g$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.
4. *Si* $f$ *et* $g$ *diffèrent en un nombre fini de points alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

**Preuve.** 1. ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

ce qui montre bien le résultat annoncé.
2. On procède comme en 1. en distinguant les cas $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \leqslant 0$.
3. Par définition, $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)dx$ est la borne inférieure de l'ensemble suivant

$$B = \Big\{ \int_a^b \psi(x)dx, \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \psi \geqslant f-g \Big\}.$$

En utilisant la Proposition 23, on montre que $B$ est minoré par $0$, d'où le résultat.
4. La preuve est similaire à celle du point 6. de la Proposition 23. ∎

**Proposition 41** *(Relation de Chasles)*

..........................................................................................

..........................................................................................

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du point 7. de la Proposition 23. ■

**Remarque 42** ..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

**Corollaire 43** *Soit* $c \in ]a,b[$*. Si* $f \in \mathscr{R}([a,c])$ *et* $f \in \mathscr{R}([c,b])$ *alors* $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

**Preuve.** Voir TD. ■

**Proposition 44** ..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

**Preuve.** Voir TD. ■

## 4.2 Fonctions continues par morceaux

**Définition 45** *On dit qu'une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* ***continue par morceaux*** *sur* $[a,b]$ ........

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

*Autrement dit,* $f$ *doit être prolongeable par continuité sur chaque sous-intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$*, pour tout* $i \in \{0, ..., n-1\}$.

**Remarque 46** *Les limites à gauche et à droite au point de subdivision $x_i$ peuvent éventuellement être différentes. C'est le cas par exemple de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suivante qui est continue par morceaux :*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ 1 & \textit{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Il existe une subdivision $\sigma = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ de $[0,1]$ telle que $f$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$ et admet des limites en chaque point de cette subdivision.*

**Corollaire 47** ..........................................................................................

..........................................................................................................

**Preuve.** Il s'agit d'une application immédiate du Corollaire 43. ■

## 4.3 Théorème de la moyenne

**Théorème 48** *(Théorème de la moyenne)* ..................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Preuve.** ...................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

.......................................................................................................... ■

## 4.4 Intégrale de Riemann et valeur absolue

**Proposition 49** ..........................................................................

..........................................................................................

**Preuve.** Voir TD. ■

**Corollaire 50** *Soient $x, y \in [a, b]$ et $f \in \mathscr{R}([a, b])$. Alors*

$$\left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|dt \right|.$$

**Preuve.** Si $x = y$, chaque membre est égal à $0$ donc l'inégalité est vraie. Si $x < y$, l'inégalité est vraie d'après la Proposition 49. Si l'on échange $x$ et $y$, chaque membre de l'inégalité est inchangé, donc le résultat reste vrai pour $x > y$. ■

## 4.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Proposition 51** ..........................................................................

**Preuve.** Voir TD. ■

**Remarque 52** *Attention, si $f, g \in \mathscr{R}([a, b])$, en général*

$$\int_a^b (f \times g)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx,$$

*mais on a une majoration de l'intégrale du produit $f \times g$ donnée par le théorème suivant.*

**Théorème 53** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)* ..........................................................

..........................................................................................

**Preuve.** ............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................ ∎

**Remarque 54** *On notera qu'on a l'égalité*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right) \times \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$$

*si et seulement si* $f + \lambda g = 0$*, c'est à dire lorsque* $f$ *et* $g$ *sont dans un rapport constant.*

# 5 Intégrale fonction de sa borne supérieure

**Définition 55** *Soient* $I$ *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*
• *Si* $I = ]a, b[$*, une primitive de* $f$ *sur* $I$ *est une fonction* $F : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $I$ *et telle que*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

• *Si* $I = ]a, b]$ *ou* $[a, b[$ *ou* $[a, b]$*, une primitive de* $f$ *sur* $I$ *est une fonction* $F : I \to \mathbb{R}$ *continue sur* $I$*, dérivable sur* $]a, b[$ *et telle que*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in ]a, b[.$$

**Proposition 56** ............................................................................................

............................................................................................

............................................................................................

**Preuve.** ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

.......................................................................................... ■

**Théorème 57** *(Théorème fondamental de l'Analyse)* ..........................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Preuve.** Supposons que nous sommes dans le cas le plus général, $I = [a,b]$. Fixons $x_0 \in ]a,b[$ et montrons que $F$ est dérivable en $x_0$ avec $F'(x_0) = f(x_0)$. Par la relation de Chasles, nous savons que pour tout $x$ dans $]a,b[$

$F(x) - F(x_0) =$ ..........................................................................................

Ainsi, comme $f(x_0)$ est une constante

$\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) =$ ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$< \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

.......................................................................................... ■

**Corollaire 58** *Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$.*

**Proposition 59** *Soient $I$ un intervalle, $f$ une fonction continue sur $I$ et $a, x \in I$.*

*1.* ..........................................................................................

*2.* ..........................................................................................

**Preuve.** Soit $a \in I$. On définit $U : I \to \mathbb{R}$ par $U(x) = \int_a^x f(t)dt \ \forall x \in I$. ..............................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

...............................................................................

............................................................................... ■

**Remarque 60** *Si $F$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ alors $\forall a, b \in I$, $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.*

# 6 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 61** *(Formule de Taylor avec reste intégral)*
*Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$ (avec $n \in \mathbb{N}$) et $a, x \in I$. Alors*

$f(x) =$. ..............................................................................

**Preuve.** Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}$ et $a, x \in I$ La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.
**Initialisation.** Supposons $f \in \mathscr{C}^1$. ..............................................................

...............................................................................

...............................................................................

**Hérédité.** Supposons la formule vraie au rang $k-1$ avec $f \in \mathscr{C}^{k+1}$. Elle s'écrit alors

$f(x) =$..............................................................................................

Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_a^x f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$ en posant $u(t) =$ .................. et $v'(t) =$ .......................

On a $u'(t) =$ .............................. et $v(t) =$ ................................... et donc

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

.............................................................................................. ■

L1 MCPI 2019-2020

# Analyse et probabilités

## PLANCHE 3

## Intégrale de Riemann

*Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.*

**Exercice 1.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $x_0 \in I$. Montrer que si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage $\vartheta$ de $x_0$ tel que pour tout $x$ dans $\vartheta$, $f(x) \neq 0$.
*Indication : Supposer $f(x_0) > 0$ et écrire la définition de la continuité de $f$ en $x_0$ pour $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$.*

**Exercice 2.** On considère la fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$.
2. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $f$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 3.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $I$.

1. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $I$.
2. Supposons que $I$ est un segment. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est seulement continue sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $I$.

**Exercice 4.** On considère $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in ]0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que$f$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion « $f$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$. »
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in ]0,1]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant n$.
4. Déduire de ce qui précède que $f$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

**Exercice 5.** On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Le but de cet exercice est de montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs la convergence de $f(x)$ vers $\ell$ lorsque $x \to +\infty$ pour $\frac{\epsilon}{3} > 0$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x, y \in [A, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| < \frac{2\epsilon}{3}$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in [0, A], |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $|x - y| < \alpha$. Montrer que si $x \leqslant A \leqslant y$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
5. Déduire de ce qui précède que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a-b| \leqslant 1 \Rightarrow |a| \leqslant 1 + |b|$.
2. Écrire la définition de l'uniforme continuité de $f$ pour $\epsilon = 1$.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(0)|$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\delta)| \leqslant n + |f(0)|$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\delta \leqslant x < (n+1)\delta$ et en déduire que
$$|f(x)| \leqslant n + 1 + |f(0)|.$$
6. Déduire de ce qui précède qu'il existe $A, B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant Ax + B$.

**Exercice 7.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante
$$\sigma = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$
et les fonctions $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{E}([0,1])$ définies par
$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \dfrac{i}{n} \text{ et } \psi_n(x) = \dfrac{i+1}{n} & \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right[ \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \varphi_n(1) = 1 \text{ et } \psi_n(1) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \leqslant x \leqslant \psi_n(x)$.
3. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \psi_n(x)dx$.
4. Déduire de ce qui précède que $x \mapsto x$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

**Exercice 8.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrer que si $f \in \mathscr{R}([a,b])$ alors $f$ est bornée sur $[a,b]$.

**Exercice 9.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\varphi, \psi, f \in \mathscr{E}([a,b])$.

1. Montrer que si $f$ s'annule sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. En déduire que si $\varphi$ et $\psi$ diffèrent en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx.$$
3. Que peut-on dire de la réciproque de la question $1.$ ?

**Exercice 10.** On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2, \forall x \in [0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que $f \in \mathscr{R}([0,1])$ et de calculer son intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante
$$\sigma = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$$
et les fonctions $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{E}([0,1])$ définies par
$$\varphi_n(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2} \text{ et } \psi_n(x) = \frac{i^2}{n^2} \text{ si } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[ \text{ et } \varphi_n(1) = \psi_n(1) = 1.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Déterminer $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\int_0^1 \psi_n(x)dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$.
4. En déduire que $f$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

**Exercice 11.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{E}([-1,1])$ et la subdivision régulière de $[-1,1]$ suivante

$$\sigma = \Big(-1, -\frac{n-1}{n}, \ldots, -\frac{i}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\Big).$$

1. Montrer que si $\varphi$ est paire alors $\displaystyle\int_{-1}^1 \varphi(x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)dx$.
2. Montrer que si $\varphi$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-1}^1 \varphi(x)dx = 0$.

**Exercice 12.** On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin\big(\frac{1}{x}\big) & \text{si} \quad x \in ]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. $h$ est-elle continue sur $[0,1]$ ?
2. $h$ est-elle monotone sur $[0,1]$ ?
3. Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([\epsilon,1])$ telles que
   $$\forall x \in [\epsilon,1], \varphi(x) \leqslant h(x) \leqslant \psi(x) \text{ et } \int_\epsilon^1 (\psi-\varphi)(x)dx \leqslant \epsilon.$$
   (b) Montrer qu'il existe $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathscr{E}([0,1])$ égales respectivement à $\varphi$ et $\psi$ sur $[\epsilon,1]$ et telles que
   $$\forall x \in [0,1], \tilde{\varphi}(x) \leqslant h(x) \leqslant \tilde{\psi}(x) \text{ et } \int_0^1 (\tilde{\psi}-\tilde{\varphi})(x)dx \leqslant 3\epsilon.$$
   (c) Peut-on déduire de ce qui précède que $h \in \mathscr{R}([0,1])$ ?

**Exercice 13.** Déterminer la limite de chacune des sommes de Riemann suivantes

$$\bullet\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n} \quad \bullet\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} \quad \bullet\ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\Big(\frac{k}{n}\Big) \quad \bullet\ x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \bullet\ y_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}.$$

**Exercice 14.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\varphi$ une fonction continue sur $[a,b]$.

1. Montrer que si $\varphi \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ alors $\varphi(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$.
   *Indication : on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\varphi(x_0) > 0$ et utiliser la Proposition 13 démontrée dans l'**Exercice** 1.*
2. Le résultat reste-t-il vrai si au lieu d'être continue, $\varphi$ est seulement dans $\mathscr{R}([a,b])$ ?

**Exercice 15.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b g(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.
*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la Proposition 44.*

**Exercice 16.** Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [0, 1]$. On souhaite montrer que la fonction $f$ admet un point fixe dans $[0, 1]$ c'est à dire

$$\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = x_0. \quad (\star)$$

On va raisonner par l'absurde en supposant que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq x$.

1. Montrer que $g$ est de signe constant sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 g(x)dx$.
3. Utiliser la Proposition 44 pour arriver à une contradiction.

**Exercice 17.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Si oui les démontrer, sinon, trouver un contre-exemple.

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.
2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
3. Si de plus $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$.

**Exercice 18.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c \in ]a, b[$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dans $\mathscr{R}([a, c]) \cap \mathscr{R}([c, b])$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathscr{E}([a, c])$ et $\tilde{\varphi}_\epsilon, \tilde{\psi}_\epsilon \in \mathscr{E}([c, b])$ telles que

$$\forall x \in [a, c],\ \varphi_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \psi_\epsilon(x) \text{ et } \int_a^c (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

$$\forall x \in [c, b],\ \tilde{\varphi}_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \tilde{\psi}_\epsilon(x) \text{ et } \int_c^b (\tilde{\psi}_\epsilon - \tilde{\varphi}_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon.$$

2. Montrer que les fonctions $\Phi_\epsilon, \Psi_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [a, c[ \\ \tilde{\varphi}_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [c, b] \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi_\epsilon(x) = \begin{cases} \psi_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [a, c[ \\ \tilde{\psi}_\epsilon(x) & \text{si} \quad x \in [c, b], \end{cases}$$

sont dans $\mathscr{E}([a, b])$ et qu'elles vérifient $\forall x \in [a, b]$, $\Phi_\epsilon(x) \leqslant g(x) \leqslant \Psi_\epsilon(x)$.

3. Déduire de ce qui précède que $g \in \mathscr{R}([a, b])$.

**Exercice 19.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision régulière de $[a, b]$ où $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On considère les fonctions $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a, b])$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si} \quad x_i \leqslant x < x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ f(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases} \quad \text{et } \psi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad x = a \\ f(x_{i+1}) & \text{si} \quad x_i < x \leqslant x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.
3. En déduire que $f \in \mathscr{R}([a, b])$.
4. Si $f$ est décroissante sur $[a, b]$, peut-on aussi montrer que $f \in \mathscr{R}([a, b])$ ?
5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant u_n \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n} f(b).$$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

   (c) Quel résultat connu vient-on de prouver ?

**Exercice 20.** On considère $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant le théorème de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t)dt.$$

**Exercice 21.** En utilisant le théorème de la moyenne, déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{x^2} \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t} dt.$$

*Indication : Pour $x \in ]0, 1]$ fixé, on pourra considérer les fonctions $f : [x^2, x] \to \mathbb{R}$ et $g : [x^2, x] \to \mathbb{R}$ définies par $f : t \mapsto \frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t}$ et $g : t \mapsto 1$.*

**Exercice 22.** Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux, positives et telles que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \times \left(\int_0^1 g(x)dx\right) \geqslant 1.$$

*Indication : peut-on utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?*

**Exercice 23.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

$f$ admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$ ?
*Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.*

**Exercice 24.** Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 x^n g(x)dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
*Indication : quelle propriété vérifie une fonction continue sur un segment ?*

**Exercice 25.** (Inégalité de Poincaré)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que
$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$
2. Si on suppose de plus que $f(b) = 0$, montrer que
$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$
*Indication :* $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$.
3. Si on suppose encore que $f(b) = 0$ et en posant $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, établir l'inégalité
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

**Exercice 26.** (Lemme de Gronwall)
Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On fixe $t_0 > 0$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant t_0,\ \phi(t) \leqslant K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds. \quad (\star)$$

On définit $f : [t_0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds}{\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)}$, $\forall t \in [t_0, +\infty[$.

1. Justifier que $f$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,
$$f'(t) = \psi(t) \frac{\phi(t) - K - \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds}{\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)}.$$
3. En déduire que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $f(t) \leqslant K$.
4. En utilisant $(\star)$, montrer finalement que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,
$$\phi(t) \leqslant K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right). \quad (\star\star)$$

♣ **Exercice 27.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La composition $g \circ f$ est-elle uniformément continue ?

♣ **Exercice 28.** Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et continue, alors $f$ est uniformément continue.

♣ **Exercice 29.** Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et continue par morceaux, alors $f$ est bornée.

♣ **Exercice 30.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que l'on peut généraliser le résultat trouvé à l'Exercice 6 de la façon suivante :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

♣ **Exercice 31.** Soit $f \in \mathscr{R}([-1,1])$. Que peut-on dire de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ si $f$ est paire ? Si $f$ est impaire ? On pourra utiliser l'exercice 11.

♣ **Exercice 32.** On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in ]0,1] \end{cases}$$

où $E\left(\frac{1}{x}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{1}{x}$. Montrer que $f \in \mathscr{R}([0,1])$.

♣ **Exercice 33.** Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases} \end{array}$$

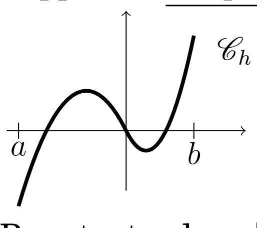
n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

♣ **Exercice 34.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $h \in \mathscr{R}([a,b])$. On introduit les fonctions

$$h^+(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad h(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad h(x) < 0. \end{cases} \quad \text{et } h^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h(x) > 0 \\ -h(x) & \text{si} \quad h(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

appelées respectivement parties positives et négatives de $h$.

1. Supposons <u>uniquement pour cette question</u> que $h$ possède l'allure suivante :




Dessiner les courbes représentatives de $h^+$, $h^-$ et $|h|$ sur $[a,b]$.

2. Pour tout $x$ dans $[a,b]$, écrire $h(x)$ en fonction $h^+(x)$ et $h^-(x)$.
3. Pour tout $x$ dans $[a,b]$, écrire $|h(x)|$ en fonction $h^+(x)$ et $h^-(x)$.

4. Soient $u, U : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant $u \leqslant h \leqslant U$. Vérifier que pour tout $x$ dans $[a,b]$

$$u^+(x) \leqslant h^+(x) \leqslant U^+(x), \quad U^-(x) \leqslant h^-(x) \leqslant u^-(x),$$

$$U^+(x) - u^+(x) \leqslant U(x) - u(x) \text{ et } u^-(x) - U^-(x) \leqslant U(x) - u(x),$$

où $u^+$ et $U^+$ (resp. $u^-$ et $U^-$) sont les parties positives (resp. négatives) de $u$ et $U$.

5. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $u_\epsilon, U_\epsilon \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que

$$u_\epsilon \leqslant h \leqslant U_\epsilon, \ \int_a^b (U_\epsilon^+ - u_\epsilon^+)(t)dt \leqslant \epsilon \text{ et } \int_a^b (u_\epsilon^- - U_\epsilon^-)(t)dt \leqslant \epsilon.$$

6. Déduire de ce qui précède que $|h| \in \mathscr{R}([a,b])$.

7. Montrer que $-|h| \leqslant h \leqslant |h|$. En déduire l'inégalité $\left|\int_a^b h(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |h(x)|dx$.

♣ **Exercice 35.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathscr{R}([a,b])$ et $g \in \mathscr{R}([a,b])$. Le but de cet exercice est de montrer que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

1. Supposons dans un premier temps que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ et fixons $\epsilon > 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $M, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $f \leqslant M$ et $g \leqslant \beta$.
   (b) Justifier qu'il existe $\varphi_\epsilon$, $\psi_\epsilon$, $u_\epsilon$ et $U_\epsilon$ dans $\mathscr{E}([a,b])$ tels que

   $$\varphi_\epsilon \leqslant f \leqslant \psi_\epsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

   $$u_\epsilon \leqslant g \leqslant U_\epsilon \text{ et } \int_a^b (U_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon.$$

   (c) Notons $\xi_\epsilon = \min\{M, \psi_\epsilon\}$ et $\theta_\epsilon = \min\{\beta, U_\epsilon\}$. Montrer que $\xi_\epsilon$, $\theta_\epsilon$ et les parties positives $(\varphi_\epsilon)^+$, $(u_\epsilon)^+$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$ et vérifient

   $$0 \leqslant (\varphi_\epsilon)^+ \leqslant f \leqslant \xi_\epsilon \leqslant M \qquad 0 \leqslant (u_\epsilon)^+ \leqslant g \leqslant \theta_\epsilon \leqslant \beta \quad \text{et} \quad (\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+ \leqslant fg \leqslant \xi_\epsilon \times \theta_\epsilon.$$

   (d) Justifier que $(\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+$ et $\xi_\epsilon \times \theta_\epsilon$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$.
   (e) Montrer que

   $$\int_a^b \left(\xi_\epsilon \times \theta_\epsilon - (\varphi_\epsilon)^+ \times (u_\epsilon)^+\right)(x)dx \leqslant (M + \beta)\epsilon,$$

   et en déduire que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

2. Supposons à présent que $f$ et $g$ sont de signes quelconques sur $[a,b]$.
   (a) Justifier qu'il existe $m, M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f \leqslant M$ et $\alpha \leqslant g \leqslant \beta$.
   (b) Justifier que la fonction $x \mapsto (f(x) - m)(g(x) - \alpha)$ appartient à $\mathscr{R}([a,b])$.
   (c) En déduire que $f \times g \in \mathscr{R}([a,b])$.

♣ **Exercice 36.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f$ une fonction de $\mathscr{R}([a,b])$. On suppose qu'il existe $0 < m < M$ tels que $\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$. Fixons $\epsilon > 0$.

1. (a) Justifier qu'il existe $\varphi_\epsilon$ et $\psi_\epsilon$ dans $\mathscr{E}([a,b])$ telles que

$$\varphi_\epsilon \leqslant f \leqslant \psi_\epsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$$

   (b) Notons $u_\epsilon = \max\{m, \varphi_\epsilon\}$ et $U_\epsilon = \min\{M, \psi_\epsilon\}$ les fonctions définies sur $[a,b]$ par

$$u_\epsilon(x) = \left\{ \begin{array}{lll} m & \text{si} & \varphi_\epsilon(x) \leqslant m \\ \varphi_\epsilon(x) & \text{si} & \varphi_\epsilon(x) \geqslant m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad U_\epsilon(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \psi_\epsilon(x) & \text{si} & \psi_\epsilon(x) \leqslant M \\ M & \text{si} & \psi_\epsilon(x) \geqslant M. \end{array} \right.$$

   Justifier que $u_\epsilon, U_\epsilon \in \mathscr{E}([a,b])$.

   (c) Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant u_\epsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant U_\epsilon(x) \leqslant M$.

   (d) Montrer que $\int_a^b (U_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon$.

   (e) Justifier que $\dfrac{1}{U_\epsilon}$ et $\dfrac{1}{u_\epsilon}$ sont dans $\mathscr{E}([a,b])$ et montrer que

$$\frac{1}{U_\epsilon} \leqslant \frac{1}{f} \leqslant \frac{1}{u_\epsilon} \text{ et } \int_a^b \left( \frac{1}{u_\epsilon} - \frac{1}{U_\epsilon} \right)(x)dx \leqslant \frac{\epsilon}{(mM)^2}.$$

   (f) En déduire que $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{R}([a,b])$.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, trouver un minorant du produit

$$A = \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx.$$

3. Ce minorant peut-il être atteint ?