Dérivée d'une fonction

1 Dérivée d'une fonction

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition *On dit que f est* <u>*dérivable en x_0*</u> *si le taux d'accroissement* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . . . .

. . . .

. . . .

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque . . . .

. . . .

Définition *On dit que f est* <u>*dérivable sur I*</u> *si* . . . .

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

Exemples

1. *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

   $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$ ....

   . . . .

   . . . .

2. *La fonction* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous allons utiliser les deux résultats suivants :*

   $$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \ldots.. \quad \textit{et} \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{\qquad}{2}\right)\cos\left(\frac{\qquad}{2}\right), \ \forall p, q \in \mathbb{R}.$$

Le premier résultat (qui peut se démontrer géométriquement à l'aide d'aires et du théorème des gendarmes) prouve que $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ ....., g *est donc dérivable en* $x_0 = ...$ *et* $g'(0) = ...$
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ *quelconque on écrit*

$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lorsque $x \to x_0$*, on a par continuité de la fonction cosinus :* $\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow}$ .... *et en posant* $y = \frac{}{2}$ *on a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{}{} = \ldots.$$

ainsi $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow}$ .... *et donc* $g'(x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition *Soient* I *un intervalle ouvert,* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable en* x_0. ....

....

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition *Soient* I *un intervalle ouvert,* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si* ....
- *f est dérivable en x_0 si et seulement si* ....

  ....

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque *On pose pour montrer cela* $\epsilon(x) =$ ....

Proposition *Soient* I *un intervalle ouvert,* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *Si f est dérivable en x_0 alors* ....
- *Si f est dérivable sur I alors* ....

Preuve. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est continue en x_0. Fixons $\epsilon' > 0$. ......

....

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(x_0)| & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \leqslant & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & < & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Choisissons $\delta > 0$ tel que

- $\delta \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\delta|\ell| < \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\epsilon(x)| < \ldots\ldots\ldots\ldots$ (c'est possible car $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$).

et alors

$$|f(x) - f(x_0)| < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui prouve que f est continue en x_0. ■

Remarque *Attention, la réciproque de ce résultat est fausse : par exemple la valeur absolue* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ . . . .

En effet, le taux d'accroissement en 0 *vérifie :*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \begin{cases} \ldots\ldots & \textit{si} \quad x < 0. \\ \ldots\ldots & \textit{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ldots\ldots$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ldots\ldots$, ...

. . . .

. . . .

2 Calcul des dérivées

2.1 Opérations élémentaires

Propriétés *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Alors pour tout* $x \in I$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *si* $g(x) \neq 0$.

Preuve. Montrons le résultat pour la dérivée du produit : $(f \times g)' = f'g + g'f$. Fixons $x_0 \in I$. On a

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

$$\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dots\dots$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + g'f$. ■

2.2 Dérivée de fonctions usuelles

On considère $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

2.3 Composition

Proposition *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\mathcal{I}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$, $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et*

$$\boxed{\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).}$$

Preuve. Fixons $x_0 \in I$. On a

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \dots\dots$$

$$= \dots\dots$$

$$\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dots\dots$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I de dérivée $f' \times (g' \circ f)$. ■

Corollaire *Soient $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\boxed{\forall y \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

Preuve. Soient $y_0 \in J$, $x_0 \in I$ tels que $y_0 = f(x_0)$ (et alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$). Pour tout $y \in J$, comme $f(f^{-1}(y)) = ...$, on a :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dots\dots\dots\dots$$

Par continuité de f^{-1}, on a $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = \dots\dots\dots\dots$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \dots\dots\dots\dots$$

Ainsi, $\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. ■

2.4 Dérivées succesives

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la .... Plus généralement, on note

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'' \dots \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

....

Théorème ....

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} + \dots + fg^{(n)},$$

où $\binom{n}{k} = \dots\dots\dots\dots$

Autrement dit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.}$$

Exemples

— *Pour* $n = 1$ *on retrouve* $(fg)' = f'g + g'f$.

— *Pour* $n = 2$ *on a* $\binom{2}{0} = \dfrac{2!}{0!(2-0)!} = \ldots,$ $\binom{2}{1} = \dfrac{2!}{1!(2-1)!} = \ldots$ *et* $\binom{2}{2} = \dfrac{2!}{2!(2-2)!} = \ldots$ *Alors*

$$\begin{aligned}(fg)'' &= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}f^{(2-k)}.g^{(k)}\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Définitions *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *On dit que* f *est de* *classe* $\mathscr{C}^0$ *sur* I *si* f *est* ....*On note alors* $f \in \mathscr{C}^0(I)$.
- *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on dit que* f *est de* *classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* I *si* f *est* .... *et* $f^{(n)}$ *est* .... *On note alors* $f \in \mathscr{C}^n(I)$.
- *On dit que* f *est de* *classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* I *si* f *est* .... *On note alors* $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$.

3 Extremum local, théorème de Rolle

3.1 Extremum local

Définitions *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I.

— *On dit que* $x_0 \in I$ *est un* *point critique* *de* f *si* . . . .

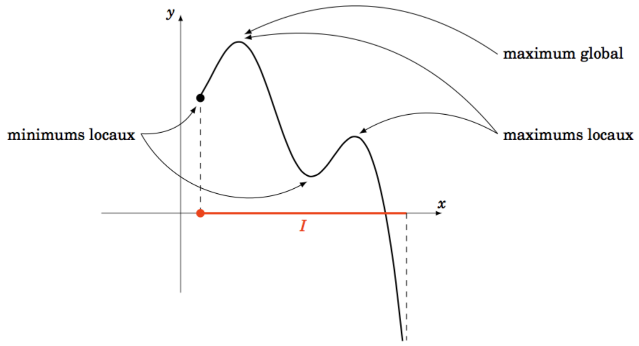
— *On dit que* f *admet un* *maximum local* *en* x_0 *si*

. . . .

. . . .

— *On dit que* f *admet un* *maximum global* *en* x_0 *si*

. . . .



— *On dit que* f *admet un* *minimum local* *en* x_0 *si*

. . . .

. . . .

— *On dit que* f *admet un* *minimum global* *en* x_0 *si*

. . . .

— *On dit que* f *admet un* *extremum local* *en* x_0 *si* f *admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Remarque ....

....

....

....

> **Théorème** *Soient I un intervalle <u>ouvert</u> et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.* ....
>
> ....

Remarque

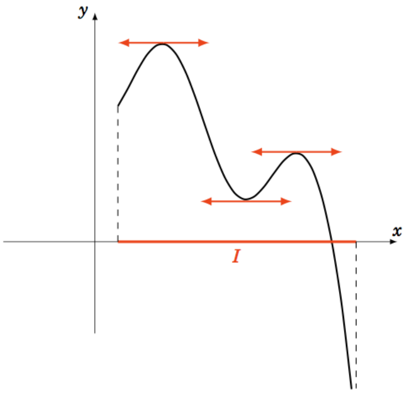
....

....

....

....

....



Preuve. Supposons que x_0 soit un maximum local de f. Il existe donc un intervalle ouvert J tel que

....

Montrons que $f'(x_0) = 0$. Soit $x \in I \cap J$.

— Si $x < x_0$ alors $f(x) - f(x_0)$......... et $x - x_0$...... donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$........ et par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{..........}$$

— Si $x > x_0$ alors $f(x) - f(x_0)$......... et $x - x_0$...... donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$........ et par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{..........}$$

Or f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{...........},$$

ainsi $f'(x_0)$........... et $f'(x_0)$........... donc $f'(x_0) = $ ..... ■

Exemple *Etudier les extremums de la fonction* f : $\begin{array}{ccc}]-3,3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{3} - 4x. \end{array}$

On calcule la dérivée de f : $\forall x \in]-3,3[$, $f'(x) =$ .... ainsi, f' s'annule en .... $\in]-3,3[$ et .... $\in]-3,3[$, les points critiques de f sont donc ..... et ..... Pour déterminer si ce sont des extremums, dressons le tableau de variation de f :

x	-3 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 3
$f'(x)$	
$f(x)$	

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarques

1. .... *: la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ *admet* $x_0 = 0$ *comme point critique mais* 0 *n'est ni un maximum local, ni un minimum local.*
2. *Dans ce théorème, la fonction* f *est définie sur un intervalle ouvert : dans le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités.* . . . .

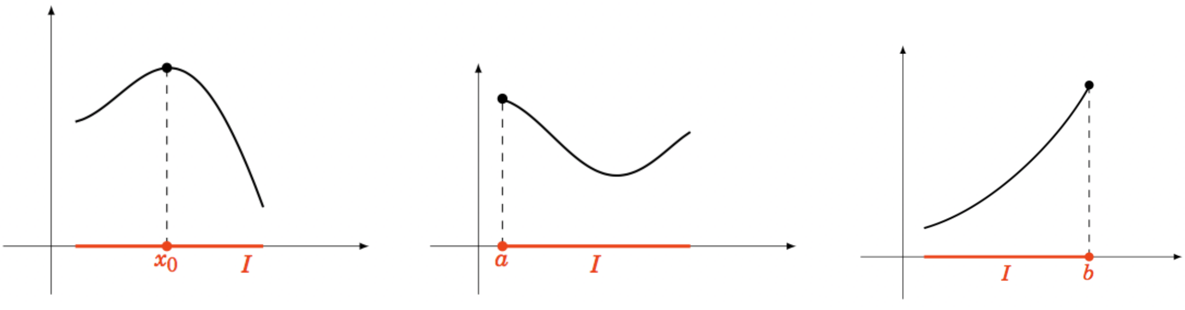
   . . . .

   . . . .

   — $x_0 = \ldots\ldots$
   — $x_0 = \ldots\ldots$
   — $x_0 \in$ ....

   . . . .

   . . . .



3. . . . .

   . . . .

   . . . .

Exemple *Reprenons l'étude de la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [-3,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{3} - 4x \end{array}$ *cette fois-ci sur l'intervalle fermé* $[-3,3]$. ....

....

....

3.2 Théorème de Rolle

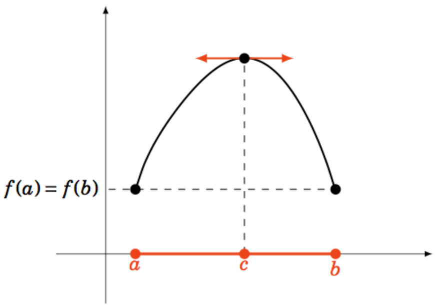
Théorème *(Théorème de Rolle)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

— ....

— ....

— ....

....



Remarque ....

....

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

....

....■

4 Théorème des accroissements finis

4.1 Théorème des accroissements finis

Théorème *(Théorème des accroissements finis)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. ....

....

Remarque

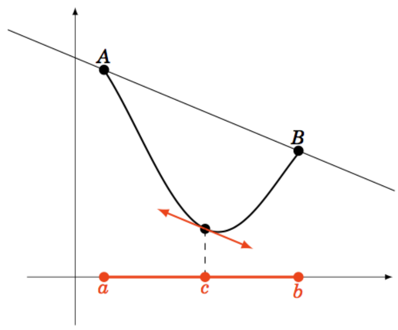
....

....

....

....

....



Preuve. ....

....

....

....

....

....

.... ■

4.2 Signe de la dérivée et monotonie

Corollaire *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors*

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ ....
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$ ....
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ ....
4. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow$ ....
5. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Rightarrow$ ....

Remarque ....

....

....

Preuve. Prouvons par exemple $1)$:

Sens ($\Rightarrow$) : ....

....

....

....

....

....

....

Sens ($\Leftarrow$) ....

....

....

.... ■

4.3 Inégalité des accroissements finis

Corollaire *(Inégalité des accroissements finis)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. ....

....

....

....

Preuve. ....

....

....

....

.... ■

Exemple *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ ....

....

....

....

....

4.4 Application au calcul de limites

Nous introduisons ci-dessous une technique qui permet de lever les indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ » pour le calcul de limites. Attention, avant d'utiliser la méthode qui suit, on commence par vérifier si on ne peut pas simplifier l'expression de la fraction, en factorisant numérateur et dénominateur par la même quantité !

Corollaire *(Règle de l'Hospital)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert* I *et* $x_0 \in I$*. On suppose que*

- ....
- ....

....

Preuve. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $g(a) \neq 0$†, par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \text{...}$$

Alors
- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$.
- h est dérivable sur $]a, x_0[$.
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

D'après le théorème de Rolle,..

$$h'(x) = \text{...}$$

donc $h'(c_a) =$ .... Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ et $g(a) \neq 0$, on a

....

Comme $a < c_a < x_0$, lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient

.... ■

†. Un tel point a existe car la fonction g ne peut pas être identiquement nulle sur I : sinon l'hypothèse $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x_0) \neq 0$ ne pourrait être vérifiée.

Remarque *Ce résultat s'applique également pour lever des indéterminations du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », c'est à dire lorsque* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Exemple *Calculer* $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x)}$. *On a*

— $I =$ ....

— $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ *est dérivable sur* I, $f(1) =$ .... *et* $f'(x) =$ ....

— $g(x) = \ln(x)$ *est dérivable sur* I, $g(1) =$ .... *et* $g'(x) =$ ....

— $\forall x \in I \setminus \{1\}$, ...

De plus

....

5 Fonctions équivalentes

Définition *Soient* $\mathscr{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *un point adhérent*[‡] *à* $\mathscr{D}$.

....

....

....

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ *ou* $f \sim g$ $(x \to a)$ *ou* $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *ou* $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

Proposition *Soient* $\mathscr{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *un point adhérent à* $\mathscr{D}$. ....

....

Remarque *La relation* $\underset{a}{\sim}$ *est une* <u>*relation d'équivalence*</u> *au voisinage de* a, *ce qui veut dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. <u>*Réflexivité*</u> : $f \underset{a}{\sim} f$.
2. <u>*Symétrie*</u> : $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$.
3. <u>*Transitivité*</u> : $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$.

Proposition ....

‡. <u>Rappel</u> : a est adhérent $\mathscr{D}$ si tout voisinage de a est d'intersection non vide avec $\mathscr{D}$.

Propriétés *Soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
f \underset{a}{\sim} g \ \textit{et} \ f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad &\Rightarrow \quad f \times f_1 \underset{a}{\sim} g \times g_1. \\
f \underset{a}{\sim} g \ \textit{et} \ f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{f}{f_1} \underset{a}{\sim} \frac{g}{g_1} \ \textit{si} \ f_1 \neq 0 \ \textit{et} \ g_1 \neq 0^{\S}. \\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad \lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad f^n \underset{a}{\sim} g^n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \textit{si} \ f > 0 \ \textit{et} \ g > 0.
\end{aligned}$$

Remarque ....

....

....

....

Proposition *En* 0 *un polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré et à l'infini il est équivalent à son monôme de plus haut degré.*

Exemple $4x^6 + 2x + 15 \underset{0}{\sim}$ ...... *et* $4x^6 + 2x + 15 \underset{+\infty}{\sim}$ ......

Proposition *Soient* $\mathscr{D}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in \mathbb{R}$ *un point adhérent à* $\mathscr{D}$.

....

Exemples

1. *Donner un équivalent de* $\ln(1+x)$ *en* 0. ....

   ....

   ....

2. *Donner un équivalent de* $\sin(x)$ *en* 0. ....

   ....

   ....

§. ou dans un voisinage de a, sauf peut-être en a.

Proposition *(Composition par l'exponentielle)*
Soient $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors

....

Proposition *(Composition par le logarithme)*
Soient $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $\mathscr{D}$ et $f, g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ telles que $f, g > 0$ et $f \underset{a}{\sim} g$. Alors

....

Le résultat reste vrai si $\ell = +\infty$.

Application au calcul de limites

1. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)}$. **Comme** $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = ...$, **on a** ....

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} = \lim_{X\to 0} .... = ... \Rightarrow \ln(1+\sin(x)) \underset{0}{\sim} .... \underset{0}{\sim} ....$$

....

....

2. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-ex)\sin(x)}{x^2+x^3}$. **On a**

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{\sim} ....., \\ e^x - 1 = ... &\underset{0}{\sim} .... = ... \Rightarrow 1 - e^x \underset{0}{\sim} ....., \\ x^2 + x^3 &\underset{0}{\sim} ..... \end{aligned}$$

....

3. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$. **On a**

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{\sim} ....., \\ x &\underset{0}{\sim} ....., \\ \ln(1+x^2) &\underset{0}{\sim} ..... \quad \textbf{car } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\qquad\qquad}{} = ..., \\ \tan(x) = ... &\underset{0}{\sim} .... = ... \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\qquad\qquad}{} = ...$$

Et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = ...$

4. **Calculer** $\lim_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$. $\forall x \in]-e,+\infty[\setminus\{0\}$,

$\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

On a

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = \dots\dots \text{ et } \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = \dots\dots \text{ donc } \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})} = \dots\dots$$

ceci montre que

$\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right) \underset{0}{\sim} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Finalement

$\frac{1}{x}\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right) \underset{0}{\sim} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

et donc

$\lim_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. **Calculer** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2\tan(x)\right)}{\sin(x)}$. **On a** $2\tan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ **et** $\frac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} \dots\dots$ **ainsi en posant**

$X = \dots\dots\dots$, **on a** $\frac{\ln(1+2\tan(x))}{2\tan(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ **et donc** $\ln(1+2\tan(x)) \underset{0}{\sim} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Alors

$$\frac{\ln\left(1+2\tan(x)\right)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2\tan(x)\right)}{\sin(x)} = \dots\dots$$

6. **Calculer** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. **On a** $\forall x > 0$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0}\frac{\qquad}{\qquad} = \dots\dots \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dots\dots\dots \Rightarrow x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dots\dots$

Finalement $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dots\dots$ **et** $\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dots\dots$