Chapitre 3 : Limites et continuité

Caroline Bauzet*

1er octobre 2021

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Opérations sur les fonctions

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :*

. *la somme de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in U.$$

. *le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \ \forall x \in U.$$

. *la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \ \forall x \in U.$$

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. Alors :*

. *$f \geqslant g$ si* . . . .

. *$f \geqslant 0$ si* . . . .

. *$f > 0$ si* . . . .

. *f est dite constante sur U si :* . . . .

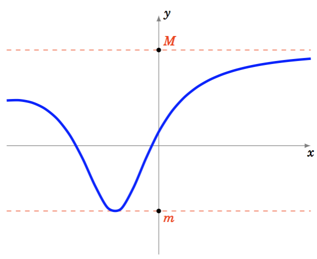
. *f est nulle sur U si* . . . .

. *f est <u>majorée</u> si* . . . .

. *f est <u>minorée</u> si* . . . .

. *f est <u>bornée</u> si* . . . .

(ou de façon équivalente . . . . *)*



*. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définitions *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}$. On dit que :*

. *f est <u>croissante</u> sur U si* . . . .

. *f est <u>strictement croissante</u> sur U si* . . . .

. *f est <u>décroissante</u> sur U si* . . . .

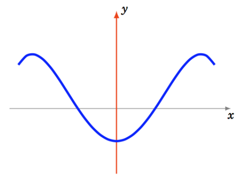
. *f est <u>strictement décroissante</u> sur U si* . . . .

. *f est <u>monotone</u> sur U si f est croissante ou décroissante sur U.*
. *f est <u>strictement monotone</u> sur U si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur U.*

1.4 Parité et périodicité

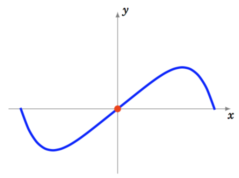
Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$ ou $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*

. *f est <u>paire</u> si* ....



Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

. *f est <u>impaire</u> si* ....

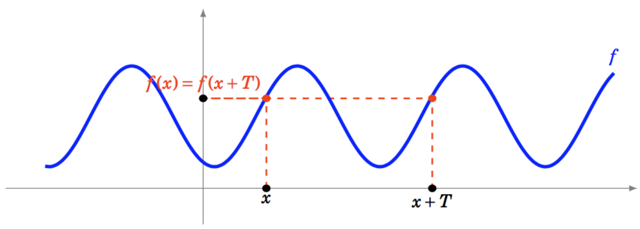


Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

Exemple *La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.*

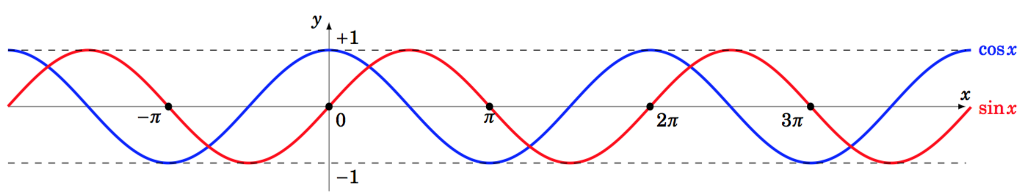
Définition *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite <u>périodique</u> de période T*

si ....



Remarque *f est périodique $\Leftrightarrow$*. . . . .

Exemple *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*



2 Limites

2.1 Définitions

Dans toute la suite on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

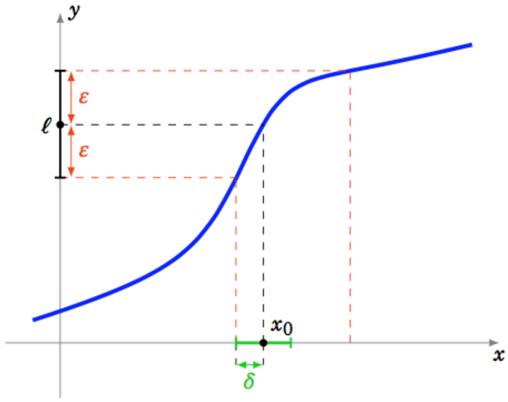
2.1.1 Limite en un point

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en x_0 si

....

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.



Remarques

1. *On a les équivalences suivantes :*

   ....

   ....

2. *Attention à l'ordre des quantificateurs très important : on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$ car le δ dépend en général du ϵ.*

Exemples

1. *Montrer que $\lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 3$. En reprenant les notations de la définition, on a* $f : \begin{array}{ccc} .... & \longrightarrow & .... \\ x & \longmapsto & .... \end{array}$, $x_0 = ...$ *et* $\ell = ...$ *Soit* $\epsilon > 0$. *Cherchons* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$,

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$. *En reprenant les notations de la définition, on a* $f : \begin{array}{ccc} .... & \longrightarrow & .... \\ x & \longmapsto & .... \end{array}$, $x_0 = ...$ *et* $\ell = ...$ *Soit* $\epsilon > 0$. *Cherchons* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Définitions

— *On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* x_0 *si*

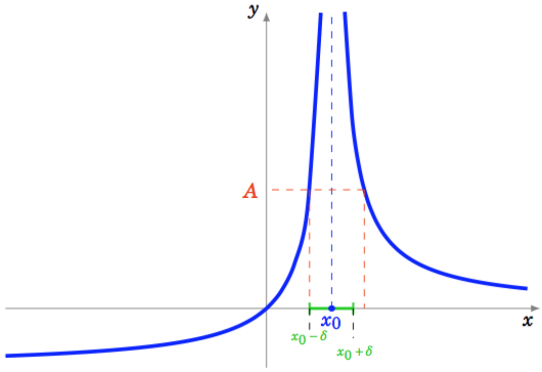
....

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

— *On dit que* f *a pour limite* $-\infty$ *en* x_0 *si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$.



Exemple *Montrer que* $\lim_{x\to 4} \frac{2}{(x-4)^2} = +\infty$. *Soit* $A > 0$. *Montrons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2.1.2 Limite en l'infini

On suppose ici que I est de la forme $]a, +\infty[$ lorsque l'on s'intéresse à la limite en $+\infty$ de f et de la forme $]-\infty, a[$ lorsque l'on s'intéresse à la limite en $-\infty$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Définitions

— *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *a pour limite* ℓ *en* $+\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

— *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *a pour limite* ℓ *en* $-\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$.

— *On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

— *On dit que* f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

— *On dit que* f *a pour limite* $-\infty$ *en* $-\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

— *On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* $-\infty$ *si*

....

On note alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

Exemples

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0$ *avec* $I =]-1, +\infty[$*. Il faut montrer que*

2. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x + 4 = +\infty$ *avec* $I =]-\infty, 0[$*. Il faut montrer que*

2.1.3 Limite à gauche, limite à droite

On suppose que f est définie sur un ensemble I de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définitions

1. *On dit que ℓ est **limite à droite** en x_0 de f si*

   ....

   On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$.

2. *On dit que ℓ est **limite à gauche** en x_0 de f si*

   ....

   On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$.

Exemple *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$. *La fonction est définie sur* $I =$ .... *Il faut montrer que*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition *Si f admet pour limite ℓ en x_0, alors* . . . .

. . . .

Remarque *On pourra utiliser la contraposée de ce résultat :* . . . .

. . . .

Exemple *Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 1 \\ \\ \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 1. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2.2 Propriétés

Proposition *Si une fonction a une limite en un point, alors cette limite est unique.*

Proposition *Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors*

- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda \times f(x) = \lambda \times \ell$.*
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x) = \ell \times \ell'$.
- *Si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.*
- *Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0^+$.*
- *Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0^-$.*

Preuve. Voir Semestre 2. ■

Proposition *(Limites usuelles)*

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\lim\limits_{x\to-\infty} e^x & = & \ldots\ldots. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} & = & \ldots\ldots \\
\lim\limits_{x\to+\infty} e^x & = & \ldots\ldots. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & = & \ldots\ldots \\
\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) & = & \ldots\ldots. & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} & = & \ldots\ldots \\
\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) & = & \ldots\ldots. & & &
\end{array}
$$

Proposition

— *Si $f \leqslant g$, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ alors $\ell \leqslant \ell'$.*

— *Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*

— ***Théorème des gendarmes :***

$$\text{Si } f \leqslant g \leqslant h \text{ et si } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

Proposition *(Croissances comparées)*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots.$
2. *Si* $b>0$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^b} = \ldots\ldots$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^b \ln(x) = \ldots\ldots.$

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Technique de calcul *(à retenir !) Calcul de la limite* ***en l'infini*** *d'une fraction de polynômes : elle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur :*

1. *Le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^3-5}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \text{..........} = \lim_{x\to+\infty} \text{..........} = \text{..........}$$
2. *Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :*
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+3x^3-5}{5x^4+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \text{..........} = \lim_{x\to-\infty} \text{..........} = \text{...........}$$
3. *Le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur :*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \text{..........} = \lim_{x\to+\infty} \text{..........} = \text{..........}$$

RAPPEL : Soient $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ deux applications telles que l'espace d'arrivée F de f soit inclus dans l'espace de départ F' de g. On définit alors l'**application composée** $g \circ f$ par
$$\begin{array}{rcl} g\circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Proposition *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{y\to\ell} g(y) = \ell'$ *alors* $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell'$.

Exemple *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{5x+1}{x^2+3x}}$. *On a* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{5x+1}{x^2+3x} =$ .... *car* $5x+1 \xrightarrow[x\to 0^+]{}$ ..... *et* $x^2+3x \xrightarrow[x\to 0^+]{}$ ...... *Ainsi, comme* $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} =$ .... *on en déduit que* $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{5x+1}{x^2+3x}} =$ ....
2. $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$. *On a*
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} =$. . . . .

. . . .

Remarque *Il existe des cas où on peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :*

....

Exemples *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x-2}{3x^2+2x+2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   $$2x^2-x-1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \textit{et} \quad 3x^2-7x+4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

   et alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-7x+4} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dots\dots\dots\dots\dots$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

   ....

   ....

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\qquad\qquad}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \\
&= \dots\dots
\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1} =$ ....

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad} \\ &= \ldots\ldots\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} =$? *La fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$ en revanche elle est bornée :*

....

....

....

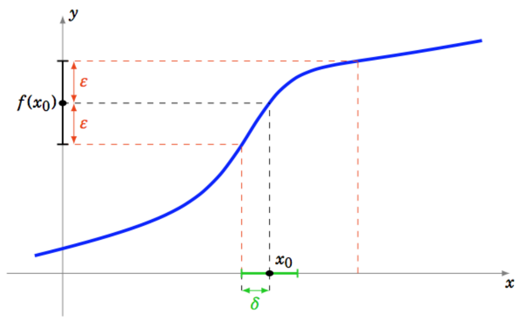
....

3 Continuité

3.1 Définitions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions



- *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

  ....

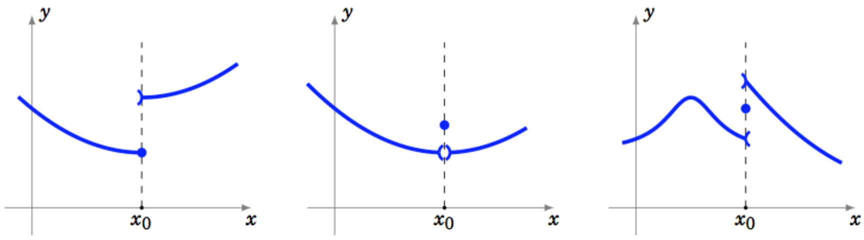
- *On dit que f est continue sur I si* ....

  ....

Remarques . *La continuité de f en un point x_0 signifie que si* ....

....

. *Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est à dire si elle n'a pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :*



Exemples

1. *La fonction* $f : x \mapsto 4$ *est continue sur* $I = \mathbb{R}$*. Fixons* $x_0 \in I$ *et écrivons la définition de la continuité en* x_0 *:*

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

2. *La fonction* $g : x \mapsto |x|$ *est continue sur* $I = \mathbb{R}$*. Fixons* $x_0 \in I$ *et écrivons la définition de la continuité en* x_0 *:*

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

Théorème *(Théorème de la bijection)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors

1. ....

   ....

2. ....

   ....

   ....

Proposition *(Continuité des fonctions usuelles) Les fonctions logarithme, exponentielle, puissances, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus, arctangente, sinus/cosinus/tangente hyperbolique, argument sinus/cosinus/tangente hyperbolique sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.*

3.2 Propriétés

Proposition *(Opérations élémentaires)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continues en un point x_0 de I. Alors

- *$\lambda.f$ est continue en x_0, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *$f + g$ est continue en x_0.*
- *$f \times g$ est continue en x_0.*
- *si $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Proposition *(Composition de fonction)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$.

....

....

Exemple *On considère les fonctions* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

....

....

....

....

....

3.3 Prolongement par continuité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \smallsetminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est* ***prolongeable par continuité*** *en x_0 si*

   ....

   ....

2. *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \text{...........} & si \quad \text{................} \\ \text{...........} & si \quad \text{................} \end{cases}$$

   ....

   ....

Remarque ....

....

Exemple *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(\frac{1}{x}) \end{array}$ *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *?*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....