# Chapitre 4 : Développements limités

Dans ce chapitre, pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de degré $n$ qui approche le mieux la fonction autour d'un point. Les résultats obtenus ne seront valables que pour $x$ autour d'une valeur fixée (ce sera souvent autour de 0). Plus précisément, on cherche à décomposer toute fonction suffisamment régulière $f$ autour d'un point $a$ donné sous la forme :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

où $T_n(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$ et $R_n(x)$ est une fonction qui vérifie $\lim\limits_{x\to a} R_n(x) = 0$.
Décomposer de cette façon une fonction autour d'un point $a$, c'est faire un développement limité (DL) de cette fonction au point $a$ à l'ordre $n$. Le polynôme $T_n(x)$ est appelé <u>partie polynomiale du DL</u> et la fonction $R_n(x)$ est appelée <u>le reste du DL</u>.

## 1 Formules de Taylor

**Rappels :** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que :
— $f$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $I$ si $f$ est continue sur $I$. On note $f \in \mathscr{C}^0(I)$.
— $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et si $f^{(n)}$ est continue sur $I$. On note $f \in \mathscr{C}^n(I)$.
— $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I)$. On note $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$.

### 1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème** ***(Formule de Taylor avec reste intégral)***
*Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe ........... sur $I$ ($n \in \mathbb{N}$) et $a, x \in I$. Alors la formule de Taylor pour $f$ au point $a$ à l'ordre $n$ est donnée par*

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= T_n(x) \text{ (Partie polynomiale du DL)}}$$
$$+ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= R_n(x) \text{ (Reste du DL)}}$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème se fait sur récurrence sur $n$. ∎

**Rappel :** Par convention, $0! = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times .... \times (n-1) \times n$ et en particulier $n! = (n-1)! \times n$.

**Remarque** *En posant $x = a + h$ (et donc $h = x - a$) la formule précédente devient :* $\forall a \in I, \forall a + h \in I$....

...........................................................................................................

...........................................................................................................

**Exemple** *La fonction $f(x) = e^x$ est de classe ......... sur $I =$ ........... pour tout ........... Fixons $a \in \mathbb{R}$.*

$f(x) = ..........\Rightarrow f(a) = .....,\quad f'(x) = .......... \Rightarrow f'(a) = .....,$

$f''(x) = .......... \Rightarrow f''(a) = .....,\quad f^{(n)}(x) = .......... \Rightarrow f^{(n)}(a) = .....$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x =$ ...........................................................................................

...........................................................................................................

## 1.2 Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ (formule de Taylor-Lagrange)

**Théorème** ***(Formule de Taylor-Lagrange avec reste $f^{(n+1)}(c)$ )***
*Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe ........... sur $I$ ($n \in \mathbb{N}$) et $a \in I$.*
*Alors* ...........................................................................................

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= T_n(x) \text{ (Partie polynomiale du DL)}}$$
$$+ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= R_n(x) \text{ (Reste du DL)}}$$

*Cette formule est appelée formule de Taylor-Lagrange pour $f$ au point $a$, à l'ordre $n$.*

**Preuve.** Admise. ■

**Remarques**

1. ...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
2. ...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................

*3.* ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Corollaire** *Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe .......... sur $I$ ($n \in \mathbb{N}$) et $a, x \in I$.*
*Si $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur $I$ par un réel $M$, alors pour tout $a, x \in I$, on a :*

..........................................................................................,

*où $T_n(x)$ est la partie polynomiale de la formule de Taylor.*

**Exemple** *Donner une approximation de* $\sin(0,01)$ *:*
*La fonction $f(x) = \sin(x)$ est de classe ......... sur $I$ = ........... pour tout ........... Fixons $a \in \mathbb{R}$.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | = | .................. | $\Rightarrow$ | $f(0)$ | = | ..... |
| $f'(x)$ | = | .................... | $\Rightarrow$ | $f'(0)$ | = | ..... |
| $f''(x)$ | = | .................... | $\Rightarrow$ | $f''(0)$ | = | ..... |
| $f^{(3)}(x)$ | = | .................... | $\Rightarrow$ | $f^{(3)}(0)$ | = | ..... |
| $f^{(4)}(x)$ | = | .................... | $\Rightarrow$ | $f^{(4)}(0)$ | = | ..... |

*La formule de Taylor de $f$ au point $a = 0$ à l'ordre 3 s'écrit :*

$f(x)$ =..........................................................................................

..........................................................................................

*Appliquons ceci pour $x = 0,01$. Le reste étant petit, cela donne*

$sin(0,01) \approx$ .................................... = .....................................

*On peut connaitre la précision de cette approximation en majorant le reste. Comme $f^{(4)}(x)$ = ............. alors $|f^{(4)}(c)| \leqslant 1$. Donc d'après le corollaire,*

$|f(x) -$ ..............................$| \leqslant$ ————

*Pour $x = 0,01$, cela donne*

$|\sin(0,01) -$ ..............................$| \leqslant$ ———— $\approx$ .................................

*Conclusion : ............................. est une valeur approchée de* $\sin(0,01)$ *à ........................... près.*

## 1.3 Formule de Taylor-Young

**Théorème** ***(Formule de Taylor-Young )***
*Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe ........... sur $I$ $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$. Alors ..............................*

$$f(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= T_n(x) \text{ (Partie polynomiale du DL)}}$$

$$+ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= R_n(x) \text{ (Reste du DL)}}$$

*où $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie ....................................*
*Cette formule est appelée formule de Taylor-Young pour $f$ au point $a$, à l'ordre $n$.*

**Remarque** ...............................................................................................
...............................................................................................................
...............................................................................................................
...............................................................................................................

**Preuve.** $f$ étant une fonction de classe ............. nous appliquons la formule de Taylor au rang ........ avec reste $f^{(n)}(c)$. Pour tout $x$, il existe .................. compris entre .... et .... tel que
$f(x)$ =......................................................................................................

...............................................................................................................

que nous réécrivons sous la forme :

$f(x)$ =......................................................................................................

...............................................................................................................

On pose $\epsilon(x)$ = ....................................

Puisque $f^{(n)}$ est ........................ sur $I$ et que $c(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow}$ .... alors $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x)$ = .... ■

**Exemple** *Donner la formule de Taylor-Young de la fonction* $f(x) = \ln(1+x)$ *au point* $0$ *et à l'ordre* $4$.
...............................................................................................................
...............................................................................................................
...............................................................................................................

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f(0) = \ldots\ldots, \\
f'(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f'(0) = \ldots\ldots, \\
f''(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f''(0) = \ldots\ldots,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f^{(3)}(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f^{(3)}(0) = \ldots\ldots, \\
f^{(4)}(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow f^{(4)}(0) = \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

*Les premiers polynômes de Taylor du DL de $f$ en 0 sont :*

$T_0(x) = \ldots\ldots$, $T_1(x) = \ldots\ldots$, $T_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $T_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $T_4(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

*$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$ sont appelés respectivement polynômes de Taylor d'ordre 0, 1, 2, 3 et 4.*

## 1.4 Résumé

Pour toute fonction $f$ suffisamment régulière, il existe donc trois formules qui s'écrivent toutes sous la forme :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

où $T_n(x)$ est toujours le même polynôme de Taylor de degré $\leqslant n$ :

$$\boxed{T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.}$$

C'est l'expression du reste $R_n(x)$ qui change :

| Nom | Formule | Régularité de $f$ |
|---|---|---|
| Taylor avec reste intégral | $R_n(x) =$ | $f \in \mathscr{C}^{n+1}$ |
| Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ | $R_n(x) =$ | $f$ est $(n+1)$ fois dérivable |
| Taylor-Young | $R_n(x) =$ | $f \in \mathscr{C}^n$ |

**Remarque** *Selon les situations l'une des formulations est plus adaptée que les autres. Bien souvent, nous n'avons pas besoin de beaucoup d'informations sur le reste et c'est la formule de Taylor-Young qui sera la plus utile.*

**Notation** : Le terme $(x-a)^n\epsilon(x)$ où $\epsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ est souvent noté $o_a\big((x-a)^n\big)$ (se prononce « petit $o_a$ » de $(x-a)^n$). Cela signifie que $o_a\big((x-a)^n\big)$ est une fonction qui vérifie la propriété :

..........................................................................

Cette notation « petit $o_a$ » simplifie beaucoup les écritures et sera utilisée par la suite. Lorsque $a=0$, on écrit « $o$ » plutôt que « $o_0$ ».

**Exemple** *$g : x \mapsto x^3$ peut s'écrire $g(x) = o(x^2)$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.*

**Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de $a=0$**

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

où $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Avec la notation « petit o » cela donne :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n),}$$

où $o(x^n)$ est une fonction qui vérifie $\dfrac{o(x^n)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

# 2 Développements limités au voisinage d'un point

## 2.1 Définition et existence

Soient $I$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

**Définition** *Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ admet un développement limité au point $a$ et à l'ordre $n$ si*

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**Proposition** *Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage d'un point $a$ alors $f$ admet un DL au point $a$ à l'ordre $n$, qui provient de la formule de Taylor-Young :*

..........................................................................................................

..........................................................................................................

*où $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.*

## 2.2 Propriétés

**Proposition** *Si une fonction $f$ admet un DL en un point, alors ce DL est unique.*

**Corollaire**
*. Si $f$ est paire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (c'est à dire : $x^0, x^2, x^4, ..., x^{2n}, n \in \mathbb{N}$).*
*. Si $f$ est impaire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés impairs (c'est à dire : $x, x^3, x^5, ...x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$).*

**Exemple** *On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 5 qui est donné par :*

$f(x) =$ .......................................................................................

.......................................................................................

*où* $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. *On a pour tout $x$ proche de 0 :*

$f(x) = ..................\Rightarrow f(0) = .....,\quad f'(x) = ..................\Rightarrow f'(0) = .....,$

$f^{(2)}(x) = ..................\Rightarrow f^{(2)}(0) = .....,\quad f^{(3)}(x) = ..................\Rightarrow f^{(3)}(0) = .....,$

$f^{(4)}(x) = ..................\Rightarrow f^{(4)}(0) = .....,\quad f^{(5)}(x) = ..................\Rightarrow f^{(5)}(0) = .....,$

$f(x) =$ .......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

*Commentaire :* .......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

## 2.3 DL des fonctions usuelles en 0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})\\
\forall\alpha\in\mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)
\end{aligned}
$$

## 2.4 DL d'une fonction en un point quelconque

**Proposition** *Une fonction $f$ admet un DL au voisinage d'un point $a$ si et seulement si la fonction $x\mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de $0$.*

**Exemples**

*1. Donner le DL de $f: x\mapsto e^x$ en $1$ à l'ordre $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de $\mathbb{R}$, à tout ordre $n\in\mathbb{N}$. De plus, pour tout $x$ proche de $1$, on a*

$e^x = e^{x-1+1}$

$= e^1\times e^{x-1}$

$= e\times e^h$ *en posant $h=$ ..................., si $x$ est proche de $1$, alors $h$ est proche de ......*

$= e\times$ ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

$=$ ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

$=$ ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

*2. Donner le DL de $g : x \mapsto \sin(x)$ en $\frac{\pi}{2}$. La fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de $\mathbb{R}$, à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $x$ proche de $\frac{\pi}{2}$, on a :*

$\sin(x)$ = $\sin(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$ = ..........................................................................................................

= ....................... = ................. *en posant* $h$ = ............ *proche de* ..... *lorsque* $x$ *proche de* ....

= ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

= ..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

# 3 Opérations sur les développements limités

## 3.1 Somme et produit

**Proposition** *On considère deux fonctions $f$ et $g$ qui admettent des DL en 0 à l'ordre $n$ :*

$f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x)$ *et* $g(x) = d_0 + d_1x + \ldots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$, *avec* $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

*Alors :*

. $f + g$ *admet un DL en 0 à l'ordre $n$ qui est donné par :*

$f(x) + g(x) =$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*où* $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

. $f \times g$ *admet un DL en 0 à l'ordre $n$ qui est donné par*

$$f(x) \times g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

*où* $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$ *et* $T_n(x)$ *est le polynôme*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

***tronqué à l'ordre*** *$n$. Tronquer un polynôme à l'ordre $n$ signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leqslant n$.*

**Exemples**
*1. Tronquer le polynôme* $(x+2x+4x^2)(1+x+x^3)$ *à l'ordre 2. On notera* $T_2(x)$ *le polynôme obtenu.*

$$(x+2x+4x^2)(1+x+x^3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

*On a donc* $T_2(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

*2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de* $f(x) = e^x + \ln(1+x)$. $x \mapsto e^x$ *et* $x \mapsto \ln(1+x)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *au voisinage de* $0$*, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :*

$$e^x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ et } \ln(1+x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

*3. Calculer le DL en* $0$ *à l'ordre* $2$ *de* $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{1+x}$. $x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sqrt{(1+x)}$ *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *au voisinage de* $0$*, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :*

$$\cos(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ et } \sqrt{1+x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

*En notant* $C(x)$ *et* $D(x)$ *les parties polynomiales des DL de* $f$ *et* $g$ *on a :*

$$C(x) \times D(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

*En tronquant le produit* $C(x) \times D(x)$ *à l'ordre* $2$*, on obtient :* $f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

## 3.2 Composition

**Proposition** *On considère deux fonctions* $f$ *et* $g$ *qui admettent des DL en* $0$ *à l'ordre* $n$ *:*

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n}_{=C(x)} + x^n \epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = \underbrace{d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n}_{=D(x)} + x^n \epsilon_2(x),$$

*avec* $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0$.
*Si* $\underline{g(0) = 0}$ *(c'est à dire* $d_0 = 0$*) alors la fonction* $f \circ g$ *admet un DL en* $0$ *à l'ordre* $n$ *dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre* $n$ *de la composition* $C(D(x))$*.*

**Remarque** *De façon plus générale, si* $g$ *admet un DL en* $0$ *à l'ordre* $n$ *et si* $f$ *admet un DL en* $g(0)$ *à l'ordre* $n$ *alors* $f \circ g$ *admet un DL en* $0$ *à l'ordre* $n$*. Il est obtenu en remplaçant le DL de* $g$ *dans celui de* $f$ *et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à* $n$*.*

**Exemple** *Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de* $h(x) = \cos(\ln(1+x))$. *On pose ici* $f(u) = \cos(u)$ *et* $g(x) = \ln(1+x)$.*On a bien* $(f \circ g)(x) = ................................ = ................$ *et* $g(0) = ...................... = ....,$ $f \circ g$ *admet donc un DL en* $0$ *à l'ordre* $2$. *On écrit le DL à l'ordre 2 de* $f(u)$ *et* $g(x)$ *:*

$$f(u) = \cos(u) \quad = \quad ............................................ \quad et \ g(x) = \ln(1+x) = ..........................................$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\begin{aligned} C(u) &= ............................................ \quad et \ D(x) = ............................................ \\ C(D(x)) &= ............................................ = ............................................ \\ &= .......................................... = ................................................ \end{aligned}$$

*Le polynôme tronqué à l'ordre* 2 *de* $C(D(x))$ *est donné par* $T_2(x) = ......................................$*et finalement le DL de* $h$ *en* $0$ *à l'ordre 2 est donné par* $h(x) = ........................................................$

## 3.3 Quotient

On considère deux fonctions $f$ et $g$ qui admettent des DL en 0 à l'ordre $n$ :

$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$, avec $\lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{f}{g}$ nous allons utiliser le DL de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + .... + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

et la formule pour la composition de DL. On a 3 cas possibles :

**Cas 1 :** Si $d_0 = 1$, on pose $u = d_1 x + .... + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{1+u}$.

**Cas 2 :** Si $d_0 \neq 0$ et $d_0 \neq 1$, alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + ... + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

**Cas 3 :** Si $d_0 = 0$ alors on factorise par $x^k$ (pour un certain $k$) afin de se ramener à l'un des cas précédents.

**Exemples** *1. Calculer le DL de* $h(x)=\tan(x)$ *en* 0 *à l'ordre 3. On pose* $f(x)=\sin(x)$ *et* $g(x)=\cos(x)$. *On écrit le DL de* $f$ *et* $g$ *en 0 à l'ordre* 3 *:*

$$f(x)=\sin(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = B(x)+o(x^3) \text{ et } g(x)=\cos(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \frac{1}{1+u} \text{ en posant } u=\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dont la partie polynomiale est } D(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C(u)+o(\ldots\ldots\ldots)$$

$$C(D(x)) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*En tronquant* $C(D(x))$ *à l'ordre* 3 *on obtient le polynôme* $T_3(x)$ *donné par* $T_3(x)=$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{1}{\cos(x)} = T_3(x)+o(x^3)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B(x)\times T_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*En tronquant* $B(x)\times T_3(x)$ *à l'ordre* 3 *on obtient le polynôme* $\tilde{T}_3(x)$ *donné par*

$$\tilde{T}_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et finalement } h(x)=\tilde{T}_3(x)+o(x^3)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*2. Calculer le DL de* $h(x)=\dfrac{1+x}{2+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 4. *On pose* $f(x)=1+x$ *et* $g(x)=2+x$. $f$ *et* $g$ *sont des polynômes de degré ........ et on a :*

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+u} \text{ en posant } u=\ldots\ldots\ldots \text{ lorsque } x \text{ est proche de } 0,\ u \text{ est proche de } \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*On remplace à présent* $u$ *dans la partie polynomiale par ........ et le reste* $o(u^4)$ *par* $o(\ldots\ldots)$ *:*

$$\frac{1}{2+x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*comme on veut un DL à l'ordre ....... on ne garde que les termes de degrés* $\leqslant$ ......

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*Finalement*

$$h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*3. Calculer le DL de* $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ *en 0 à l'ordre 3. On a*

$$\sin(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4\epsilon_1(x)$$

$$\mathrm{sh}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + x^4\epsilon_2(x)$$

*Comme* $d_0 = \ldots\ldots$ *et* $c_1, d_1 \neq 0$ *on va faire un DL de* $\sin(x)$ *et* $\mathrm{sh}(x)$ *à l'ordre* $3 + \ldots = \ldots\ldots$ *En effet, Le premier terme du DL de* $\mathrm{sh}(x)$ *est de degré* $1$*, on a donc factorisé le dénominateur par* $x^1$*. Comme on vise un DL d'ordre* $3$*, on fait un DL d'ordre* $3+1$ *car on sait que l'on va diviser par* $x$ *et perdre un ordre.*

$$\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{ en posant } u = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

# 4 Applications des développements limités

## 4.1 Calcul de limites

On cherche à calculer $\lim_{x\to a} f(x)$. Si $f$ admet un DL en $a$ à l'ordre $n$, alors

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

et donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\big(c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)\big)\\ &= c_0.\end{aligned}$$

**Exemple** *Calculer* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$. *On a*

$$\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## 4.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

**Proposition** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en un point $a \in I$*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x),$$

*où $k$ est le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que le coefficient $c_k$ soit non nul. Alors une équation de la tangente à la courbe de $f$ (notée $\mathcal{C}_f$) en $a$ est*

..............................................

*et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente pour $x$ proche de $a$ est donnée par le signe de $f(x) - y$ :*

— *Si $c_k(x-a)^k > 0$ alors* ..........................................................................

— *Si $c_k(x-a)^k < 0$ alors* ..........................................................................

— *Si le signe de $c_k(x-a)^k$ change lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$, alors* ....................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Exemple** *On considère $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente de $f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et donner la position de la courbe de $f$ par rapport à sa tangente. On a*

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *donc* $f''(\frac{1}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ *et* $k = \ldots\ldots$

*On en déduit le DL de $f$ en $1/2$ par la formule de Taylor-Young :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*La tangente en* $\frac{1}{2}$ *a donc pour équation* $y =$ ......................................

*La position du graphe de* $f$ *par rapport à* $y$ *est donnée par le signe de* ................................... *donc* $\mathcal{C}_f$ *est* ................................... *de* $y$.

## 4.3 Développement limité en $+\infty$

**Définition** *Soit* $f$ *une fonction définie sur un intervalle* $I = ]x_0, +\infty[$. *On dit que* $f$ *admet un DL en* $+\infty$ *à l'ordre* $n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f(x) =$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exemple** *On considère la fonction* $f : x \mapsto \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$. *Admet-elle un DL en* $+\infty$ *? On remarque que*

$f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)$

$= \ln(2) + \ln(1+u)$ *en posant* $u =$ ......... *quand* $x$ *est proche de* ......... *alors* $u$ *est proche de* .........

$= \ln(2) +$ ........................................................................................................................

$= \ln(2) +$ ........................................................................................................................

$= \ln(2) +$ ........................................................................................................................

*Commentaires :* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Remarques**

1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*2.* ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Proposition** *On suppose que la fonction* $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ *admet un DL en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*) donné par*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\epsilon\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

*où* $k$ *est le plus petit entier* $\geqslant 2$ *tel que le coefficient* $\dfrac{1}{x^k}$ *soit non nul.*

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................