

Chapitre 4 : Dérivées, intégrales et primitives

Caroline Bauzet*

1^{er} octobre 2021

1 Dérivation d'une fonction

1.1 Définitions et règles de dérivation

On note dans la suite I et J des intervalles ouverts de \mathbb{R} .

Définitions. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

. On dit que f est **dérivable en** a si l'application

$$I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \text{-----}$$

.....
.....

. On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si

.....

. On appelle **domaine de dérivabilité** de f l'ensemble $\tilde{I} = \dots\dots\dots$

On note la fonction dérivée de f par $f' : \begin{matrix} \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{matrix}$.

Remarque Le domaine de dérivabilité d'une fonction est toujours inclus dans son domaine de définition et se détermine toujours avant de calculer la dérivée de la fonction.

Exemples Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des applications suivantes :

$$f : x \mapsto \ln(1 - x^2), \quad g : x \mapsto \sqrt{2x + 1} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \exp(\sin(x^2)).$$

.....
.....
.....

*. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

.....

Proposition Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors
- Si f est dérivable sur I alors

Propriétés (Règles de dérivation)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$

. $(f + g)'(x) = \dots\dots\dots$

. $(\lambda f)'(x) = \dots\dots\dots$

. $(f \times g)'(x) = \dots\dots\dots$

. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \text{-----}, \text{ si } f(x) \dots\dots\dots$

. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \text{-----}, \text{ si } g(x) \dots\dots\dots$

Proposition (Dérivation de composée de fonctions)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles ouverts I et J et telles que $\mathcal{I}(f) = f(I) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et on a pour tout $x \in I$

$$(g \circ f)'(x) = \dots\dots\dots$$

Exemples Si $g_1(x) = e^{x^2+3x+1} = e^{f_1(x)}$ alors $g_1'(x) = \dots\dots\dots$

Si $g_2(x) = \sin(2x + 1) = \sin(f_2(x))$ alors $g_2'(x) = \dots\dots\dots$

Si $g_3(x) = (x^3 + 2 \ln(x))^2 = (f_3(x))^2$ alors $g_3'(x) = \dots\dots\dots$

Si $g_4(x) = \ln(1 + \cos(x)) = \ln(f_4(x))$ alors $g_4'(x) = \dots\dots\dots$

Corollaire (Dérivation de l'application réciproque)

Soient $f : I \rightarrow J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

.....
.....

$$(f^{-1})'(y) = \dots\dots\dots$$

Exemples $f(x) = x^2$, $f'(x) = \dots\dots$, $f^{-1}(y) = \dots\dots$ donc $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots}$.

$g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = \dots\dots$, $g^{-1}(y) = \dots\dots$ donc $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots} = \dots\dots$

$h(x) = \tan(x)$, $h'(x) = \dots\dots\dots$, $h^{-1}(y) = \dots\dots\dots$ donc $(h^{-1})'(y) = \dots\dots\dots$

.....

Définition (Tangente en un point)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point $(a, f(a))$ est donnée par

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

1.2 Étude des variations d'une fonction

Proposition (Sens de variation d'une fonction)

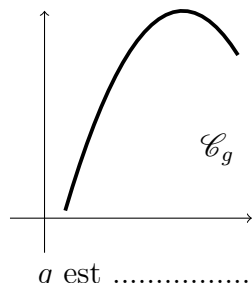
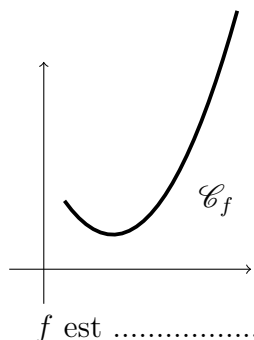
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
2. $\forall x \in]a, b[f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
3. $\forall x \in]a, b[f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
4. $\forall x \in]a, b[f'(x) > 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$
5. $\forall x \in]a, b[f'(x) < 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$

Remarque
.....
.....
.....

1.3 Convexité et concavité

Graphiquement, une fonction f définie sur un intervalle est convexe si et seulement si, pour tous points A et B appartenant au graphe de f , le graphe de f entre A et B est en dessous du segment $[A, B]$. Pour une fonction concave, c'est le contraire : le graphe est au dessus du segment $[A, B]$.



Définitions. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

. f est **convexe** sur I si elle vérifie

.....

. f est **concave** sur I si

Proposition (Critère de convexité)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est dérivable sur un l'intervalle ouvert I , on note f'' sa dérivée.

. Si $f'' \geq 0$ sur I alors

. Si $f'' \leq 0$ sur I alors

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

. Si f est convexe sur I alors

. Si f est concave sur I alors

Remarque Cette proposition nous dit que si f est dérivable et convexe, le graphe de f est au dessus de chacune de ses tangentes alors que si elle est concave, le graphe est au dessous de chacune de ses tangentes.

Exemples Montrer que les fonctions exponentielle et le logartihme vérifient les propriétés suivantes :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$

.....

.....

.....

.....

.....

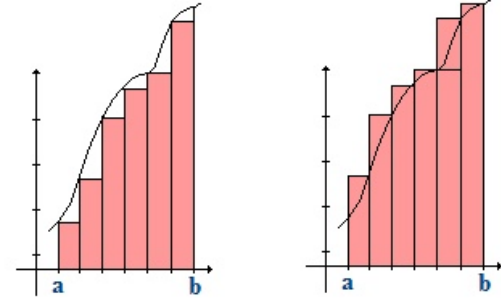
.....

.....

2 Intégrales et primitives

2.1 Quelques mots sur l'intégrale

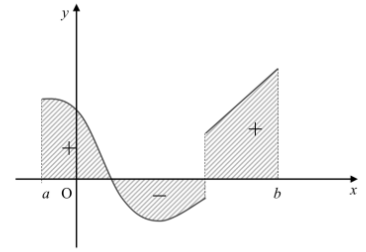
On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$. On cherche à calculer l'aire \mathcal{A} située en dessous du graphe de f noté \mathcal{C}_f et entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses \mathcal{O}_x . Pour ce faire, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessous de la courbe en découpant l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles $[a_n, b_n]$ et on note \mathcal{A}_n^- l'aire obtenue. De la même façon, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessus de la courbe et on note \mathcal{A}_n^+ l'aire obtenue.



Si la limite des aires en dessous est égale à la limite des aires au dessus lorsque le pas de subdivision de l'intervalle tend vers 0 (càd $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n^+$), on appelle cette limite commune l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ et on la note $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$. On dit alors que f est intégrable sur $[a, b]$.

Remarques

a) Si f prend des valeurs positives et négatives, son intégrale sur $[a, b]$ est égale à la somme des aires que forme son graphe avec l'axe des abscisses \mathcal{O}_x selon la règle suivante : si la forme géométrique est située au dessus de l'axe des abscisses, son aire est comptée positivement alors que si elle est au dessous, l'aire est comptée négativement.



b) Si f est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{R}$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \dots\dots\dots$$

Propriétés Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. La fonction $f + g$ est intégrable et on a

.....

2. Pour tout nombre réel λ , la fonction λf est intégrable et on a

.....

3. Si $f \geq g$ alors

.....

4. Pour tout $c \in]a, b[$, f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et on a

.....

Remarques

— Deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.

— **Attention** : $\int_a^b f(t) \times g(t) dt \neq \dots$

— Pour toute fonction f et tout réel a on pose par convention $\int_a^a f(t) dt = \dots$

— Si f est intégrable sur $[a, b]$, on pose $\int_a^b f(t) dt = \dots$

— Grâce à ces deux conventions, on obtient la formule d'addition, dite relation de Chasles :

$$\forall x, y, z \in [a, b], \int_x^z f(t) dt = \dots$$

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité suivant :

Théorème Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est \dots

Remarque (Autre critère) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est \dots

2.2 Primitives : définitions et notations

Définition Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

. Si I est un intervalle ouvert, une primitive de f est \dots

. Si $I = [a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, une primitive de f est \dots

Remarque Si F est une primitive de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, toute primitive G de f sur I est de la forme :

$$\begin{aligned} G : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) + c, \end{aligned}$$

où c est un réel quelconque. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Théorème Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. \dots

Remarque Ce théorème nous dit que toute fonction continue sur I possède des primitives. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

2.3 Outils et techniques de calcul

2.3.1 Primitives évidentes

Lorsque l'on cherche la primitive d'une fonction, on commence par regarder si celle-ci ne s'écrit pas sous la forme $u'(x) \times f(u(x))$, avec $f(u(x))$ égale à l'une des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u^\alpha(x), \frac{1}{\sqrt{u(x)}}, \frac{1}{u(x)}, e^{u(x)}, \cos(u(x)), \sin(u(x)), 1 + \tan^2(u(x)), \frac{1}{\cos^2(u(x))}, \frac{1}{1 + u^2(x)}, \frac{1}{\sqrt{1 - u^2(x)}},$$

puis on se réfère au tableau des primitives usuelles.

Exemples Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (x + 1)^4 = u'(x) \times (u(x))^4$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_1(x) = \dots\dots\dots$$

2. $f_2(x) = (4x + 1)^2 = \dots\dots \times 4(4x + 1)^2 = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_2(x) = \dots\dots\dots$$

3. $f_3(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_3(x) = \dots\dots\dots$$

4. $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \dots\dots \times \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \dots\dots \times \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_4(x) = \dots\dots\dots$$

5. $f_5(x) = (6x + 1)e^{3x^2+x} = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_5(x) = \dots\dots\dots$$

6. $f_6(x) = 3xe^{5x^2} = \dots\dots\dots \times 10xe^{5x^2} = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_6(x) = \dots\dots\dots$$

7. $f_7(x) = 4x \cos(x^2 + 3) = \dots\dots\dots \cos(x^2 + 3) = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_7(x) = \dots\dots\dots$$

8. $f_8(x) = (2x - 3) \sin(x^2 - 3x + 1) = \dots\dots\dots$ avec $u(x) = \dots\dots\dots$, a pour primitive

$$F_8(x) = \dots\dots\dots$$

9. $f_9(x) = \frac{12x+2}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \dots \times \frac{1}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \dots \times \frac{1}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})}$ avec $u(x) = \dots$,
 a pour primitive
 $F_9(x) = \dots$

10. $f_{10}(x) = \frac{3}{1+4x^2} = \dots \times \frac{1}{1+(\dots)^2} = \dots \times \frac{2}{1+(\dots)^2} = \dots \times \frac{2}{1+(\dots)^2}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{10}(x) = \dots$

11. $f_{11}(x) = \frac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3} = \frac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{11}(x) = \dots$

12. $f_{12}(x) = \frac{3x+6}{x^2+4x} = \dots \times \frac{x+2}{x^2+4x} = \dots \times \frac{2x+4}{x^2+4x} = \dots \times \frac{2x+4}{x^2+4x}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{12}(x) = \dots$

13. $f_{13}(x) = \frac{5}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(\dots)^2}} = \dots \times \frac{5}{\sqrt{1-(\dots)^2}} = \dots \times \frac{5}{\sqrt{1-(\dots)^2}}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{13}(x) = \dots$

14. $f_{14}(x) = \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$
 $= 2 \times \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{14}(x) = \dots$

15. $f_{15}(x) = \frac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \frac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \frac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \dots \times \frac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}}$
 $= \dots \times \frac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{15}(x) = \dots$

16. $f_{16}(x) = \frac{7}{9x^2+12x+5} = \frac{7}{9x^2+12x+5} = \frac{7}{9x^2+12x+5} = \dots \times \frac{7}{9x^2+12x+5}$
 $= \dots \times \frac{7}{9x^2+12x+5}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive
 $F_{16}(x) = \dots$

$$17. f_{17}(x) = \frac{5x}{x^4 + 6x^2 + 10} = \frac{5x}{x^4 + 6x^2 + 10} = \frac{5x}{x^4 + 6x^2 + 10} = \dots \times \frac{\dots}{\dots}$$

= $\dots \times \frac{\dots}{\dots}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive

$$F_{17}(x) = \dots$$

$$18. f_{18}(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^4 + 6x^2 + 10} = \dots \times \frac{4x^3 + 12x}{x^4 + 6x^2 + 10} = \dots \times \frac{\dots}{\dots}$$

avec $u(x) = \dots$, a pour primitive

$$F_{18}(x) = \dots$$

$$19. f_{19}(x) = \frac{5x}{9x^4 - 12x^2 + 5} = \frac{5x}{9x^4 - 12x^2 + 5} = \frac{5x}{9x^4 - 12x^2 + 5} = \dots \times \frac{\dots}{\dots}$$

= $\dots \times \frac{\dots}{\dots}$ avec $u(x) = \dots$, a pour primitive

$$F_{19}(x) = \dots$$

2.3.2 Intégration par parties

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a, b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, en intégrant sur $[a, b]$, on obtient

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

On en déduit alors la formule dite « d'intégration par parties » :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \dots$$

ou, pour une intégrale indéfinie :

$$\int u(x)v'(x)dx = \dots$$

Exemples

- Calculer $\int_0^1 xe^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, de cette façon, $u'(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$. Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables sur $[0, 1]$, u' et v' sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors

$$\int_0^1 xe^x dx = \dots$$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Calculer $\int_1^e x \ln(x) dx$. On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$, alors $u'(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$.
 Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables sur $[1, e]$, u' et v' sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln(x) dx &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

3. Calculer $\int \arcsin(x) dx$. On pose $u(x) = \arcsin(x)$ et $v'(x) = 1$, alors $u'(x) = \text{---}$ et $v(x) = \dots$.
 Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables sur $] -1, 1[$, u' et v' sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) dx &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

4. Donner une primitive de $f : x \mapsto x^2 e^x$ sur \mathbb{R} . On pose $u(x) = \dots$ et $v'(x) = \dots$, de cette façon, $u'(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$. On a

$$\int x^2 e^x dx = \dots\dots\dots$$

L'astuce pour calculer cette intégrale qui contient une exponentielle consiste à refaire une intégration par parties pour calculer

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où

$$\int x^2 e^x dx = \dots\dots\dots$$

Une primitive de f sur \mathbb{R} est donc $F : x \mapsto \dots\dots\dots$

2.3.3 Changement de variable

Théorème Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \rightarrow I$ une
 telle que φ' soit Pour tout $a, b \in I$, on a en posant

Autrement dit, si F est une primitive de f , alors

Remarque

Exemples 1. Calculer $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx$ en posant $t = x^2$. L'application $x \mapsto x^2$ est une bijection continue de vers et sa dérivée $x \mapsto \dots$ est continue sur, ce changement de variable est donc admissible. On procède par étapes :

- . Les bornes de l'intégrale : si $x = 1$, alors $t = \dots$ et si $x = 2$ alors $t = \dots$
- . La variable d'intégration : comme $t = x^2$, par dérivation, $dt = \dots$
- . L'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx = \dots \int_1^2 \frac{2x}{1+(\dots)^2} dx = \dots$$

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$ en posant $t = e^x$. L'application $x \mapsto e^x$ est une bijection continue de vers et sa dérivée $x \mapsto \dots$ est continue sur, ce changement de variable est donc admissible.

- . Les bornes de l'intégrale : si $x = 0$, alors $t = \dots$ et si $x = 1$ alors $t = \dots$
- . La variable d'intégration : comme $t = e^x$, par dérivation, $dt = \dots$
- . L'intégrale : on a

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x(e^x + e^{-x})} dx = 2 \int_0^1 \frac{\dots}{(\dots)^2 + 1} = 2 \int_{\dots}^{\dots} \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

3. Calculer $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$ en posant $t = \sqrt{1+x}$. L'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est une bijection continue de vers et sa dérivée $x \mapsto \dots$ est continue sur, ce changement de variable est donc admissible.

- . Les bornes de l'intégrale : si $x = 3$, alors $t = \dots$ et si $x = 8$ alors $t = \dots$
- . La variable d'intégration : comme $t = \sqrt{1+x}$, par dérivation, $dt = \dots$
- . Comme $t = \sqrt{1+x}$, on a $x = \dots$

. L'intégrale : on a

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx = \dots \int_3^8 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx = \dots \int_{\dots}^{\dots} \dots = \dots \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

Pour calculer cette intégrale, on va décomposer $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ en éléments simples : on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{\dots}{(t-1)(t+1)} = \frac{\dots}{(t-1)(t+1)},$$

ce qui amène à
$$\begin{cases} a+b = \dots \\ a-b = \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{aligned} 2 \int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt &= 2 \int_2^3 \frac{1}{\dots(t-1)} dt - 2 \int_2^3 \frac{1}{\dots(t+1)} dt \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

4. Calculer $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} dx$ en posant $t = \sin(x)$. L'application $x \mapsto \sin(x)$ est une bijection continue de vers et sa dérivée $x \mapsto \dots$ est continue sur, ce changement de variable est donc admissible.

. Les bornes de l'intégrale : si $x = -\pi/4$, alors $t = \dots$ et si $x = \pi/4$ alors $t = \dots$

. La variable d'intégration : comme $t = \sin(x)$, on a $dt = \dots$

. L'intégrale : on a $f(x) = \frac{\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\dots} = \frac{\cos(x)}{\dots}$,
et donc

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\dots} dx = \int \dots = \dots$$

5. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$ en posant $t = 1-x^2$. L'application $x \mapsto 1-x^2$ est une bijection continue de vers et sa dérivée $x \mapsto \dots$ est continue sur, ce changement de variable est donc admissible.

. Les bornes de l'intégrale : si $x = 0$, alors $t = \dots$ et si $x = 1/2$ alors $t = \dots$

. La variable d'intégration : comme $t = 1-x^2$, on a $dt = \dots$

. L'intégrale : on a

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \dots \int_0^{1/2} \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \dots \int_{\dots}^{\dots} \dots dt = \dots$$

2.3.4 Intégration de fonctions trigonométriques

On s'intéresse ici aux intégrales de la forme $\int \sin^p(x) \cos^q(x) dx$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On différencie quelques cas selon la parité et le signe de p et q .

a) q impair : On prend pour variable $t = \dots\dots\dots$ donc $dt = \dots\dots\dots$ et on utilise la formule $\cos^2(x) = \dots\dots\dots$

b) p impair : Même principe qu'en **a)** en posant $t = \dots\dots\dots$

c) $p, q \geq 0$ et pairs : On abaisse le degré en utilisant les formules :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ et } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

puis si nécessaire on recommence avec $\sin^2(2x)$ et $\cos^2(2x)$, ou on change de variables.

d) p et q pairs, l'un au moins étant négatif : On prend pour variable $t = \dots\dots\dots$, cette méthode est aussi applicable lorsque p et q sont impairs.

Exemples *Calculer*

1. $\int \cos(x) \sin^3(x) dx = \dots\dots\dots$

.....

2. $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \dots\dots\dots$

.....

3. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} \dots\dots\dots dx = \int \dots\dots\dots dt = -\frac{1}{3 \sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)} + C, C \in \mathbb{R}.$

On a posé $t = \dots\dots\dots$

4. $\int \sin^5(x) \cos^3(x) dx = \frac{\sin^6(x)}{6} - \frac{\sin^8(x)}{8} + C, C \in \mathbb{R},$ en posant $t = \sin(x).$

2.3.5 Intégration de fractions rationnelles

Définition Une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{R} est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} avec $Q \neq 0$.

Théorème (Décomposition en éléments simples sur \mathbb{R})

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $\text{pgcd}(P, Q) = 1$

.....

Alors $\frac{P}{Q}$ se décompose de manière unique comme somme

—

où $A, B, C \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}^*$ avec $i \leq \alpha$ et $j \leq \beta$.

Remarque

Proposition (Décomposition dans le cas où $\deg(P) < \deg(Q)$)

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $\text{pgcd}(P, Q) = 1$ et $\mathbf{deg}(P) < \mathbf{deg}(Q)$. On suppose qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que Q se factorise de la façon irréductible suivante :

$$Q(x) = (x - a)^\alpha (x^2 + bx + c)^\beta, \quad \text{avec } b^2 - 4c < 0.$$

Alors il existe $A_1, \dots, A_\alpha \in \mathbb{R}$, $B_1, \dots, B_\beta \in \mathbb{R}$ et $C_1, \dots, C_\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \dots\dots\dots$$

Exemples Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $R_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$

.....

2. $R_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x - 2)(x^2 + 2x - 3)}$

.....

b) **Intégration d'un élément simple de 2^{de} espèce** $\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}$

Il s'agit de calculer $F(x) = \int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} dx$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$. Ce calcul peut s'effectuer en trois étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 6} dx.$$

Étudions le dénominateur : on a $\Delta = \dots\dots\dots$

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x + 4$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur $x^2 + 4x + 6$: on a $(x^2 + 4x + 6)' = \dots\dots\dots$ et donc

$$x + 4 = \dots\dots\dots$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 6} dx &= \dots \int \frac{\dots}{x^2 + 4x + 6} dx + \dots \int \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx \\ &= H(x) + G(x). \end{aligned}$$

On a $H(x) = \dots \int \text{---} dx = \dots\dots\dots$

donc $H(x) = \dots\dots\dots$

Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On écrit le polynôme au dénominateur $x^2 + 4x + 6$ sous la forme « $c(t^2 + 1)$ » avec $c \in \mathbb{R}$ une constante pour faire apparaître la dérivée de la fonction arctangente :

$$x^2 + 4x + 6 = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ainsi

$$G(x) = \dots \int \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Étape 3 : On conclut

$$F(x) = H(x) + G(x) = \dots\dots\dots$$

En résumé : intégration d'un élément simple de 2^{de} espèce

On considère P un polynôme de degré 2 dont le discriminant $\Delta < 0$ (donc pas de racine réelles).

- Un terme du type $\frac{Ax+B}{P(x)}$ avec $A \neq 0$ et $B \in \mathbb{R}$ aura pour primitive $C \times \ln(P(x))$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante ou bien $C \times \ln(P(x)) +$ une arctangente, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.
- Un terme du type $\frac{B}{P(x)}$ avec $B \in \mathbb{R}$ aura pour primitive une arctangente.

c) Plan d'étude d'une fraction rationnelle

On s'intéresse à des fonctions qui s'écrivent sous la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes. Voici les étapes à suivre pour déterminer une primitive de $\frac{P}{Q}$:

1. On détermine le domaine de définition de $\frac{P}{Q}$ en cherchant les racines du polynôme Q .
2. On regarde s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ s'écrive sous la forme $\lambda \times Q'(x)$, auquel cas

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\lambda \times Q'(x)}{Q(x)} dx = \lambda \ln(|Q(x)|) + C, C \in \mathbb{R}.$$

3. S'il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \lambda \times Q'(x)$ on examine les degrés de P et Q :
 - (a) Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on effectue la division de $P(x)$ par $Q(x)$. En notant $Q_1(x)$ le quotient obtenu et $R_1(x)$ le reste on a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)Q_1(x) + R_1(x)}{Q(x)} = Q_1(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}$$

avec $\deg(R_1) < \deg(Q)$ et on passe à l'étape 3.(b) avec R_1 et Q .

- (b) Si $\deg(P) < \deg(Q)$, on factorise au maximum $P(x)$ et $Q(x)$, et on simplifie éventuellement $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'il existe des racines communes.

4. On décompose $\frac{P}{Q}$ en éléments simples à partir de sa forme factorisée déterminée à l'étape 3.(b).

- (a) Si on a des éléments simples de 1^{ère} espèce : par exemple $\frac{2}{x-1}$ a pour primitive $2 \ln(|x-1|)$.
- (b) Si on a des éléments simples de 2^{de} espèce : par exemple $\frac{x}{x^2+x+1}$ avec x^2+x+1 qui ne s'annule jamais ($\Delta < 0$). Dans un premier temps, on fait apparaître la dérivée de x^2+x+1 au numérateur en écrivant $x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1},$$

avec $u(x) = x^2+x+1$.

Dans un second temps, on écrit le second terme $\frac{1}{x^2+x+1}$ sous la forme $\alpha \times \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et v un polynôme à déterminer. Pour cela, on écrit x^2+x+1 sous la forme $1 + (\dots)^2$. On a

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}\right)^2\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

En posant $v(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ qui a pour dérivée $v'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, on obtient donc

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}.$$

Finalement,

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 3} \times \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}$$

admet pour primitive

$$\frac{1}{2} \ln(|u(x)|) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(v(x)) = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

d) Intégration d'un élément simple de 2nde espèce $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$, avec $\beta \geq 2$

Il s'agit de calculer $F(x) = \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta} dx$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2-4c < 0$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $\beta \geq 2$. Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2} dx.$$

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x+1$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur x^2-2x+3 : on a $(x^2-2x+3)' = \dots\dots\dots$ et donc

$$x+1 = \dots\dots\dots$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2} dx &= \dots \int \frac{\dots}{(x^2-2x+3)^2} dx + \dots \int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2} dx \\ &= H(x) + G(x). \end{aligned}$$

$H(x)$ est de la forme $\dots \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = \dots \times -\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = \dots\dots\dots$

donc $H(x) = -\frac{1}{\dots(x^2-2x+3)}$. Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On décompose le polynôme au dénominateur x^2-2x+3 en somme d'un carré et d'un reste :

$$x^2-2x+3 = \dots\dots\dots \text{ en posant } t = \dots\dots\dots, \text{ on a } x^2-2x+3 = \dots\dots\dots$$

$$dt = \dots\dots \text{ donc } G(x) = \dots \int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2} dx \text{ devient } \dots \int \frac{dt}{(\dots\dots\dots)^2} = \phi(t).$$

Étape 3 : Calcul de $\phi(t)$: l'idée est d'écrire (t^2+2) sous la forme « $c^2\left(\frac{t^2}{c}+1\right)$ », où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

$$\phi(t) = 2 \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = 2 \int \frac{dt}{\left(2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\right)^2} = 2 \int \frac{dt}{\dots\dots\dots \left(\dots\dots\dots + 1\right)^2} = \int \frac{dt}{\dots\dots\dots \left(\left(\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}\right)^2 + 1\right)^2}.$$

On pose alors $\tan(\theta) = \dots\dots\dots$ donc $t = \dots\dots\dots$, $dt = \dots\dots\dots$
 Il en résulte :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int \frac{dt}{\dots\dots\dots} \\ &= \int \frac{d\theta}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots \int \frac{d\theta}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots \int \dots\dots\dots d\theta \\ &= \dots\dots \int \frac{d\theta}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots \int \dots\dots\dots d\theta \\ &= \dots\dots \int \frac{d\theta}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Étape 4 : On retourne à la variable de départ x pour le calcul de $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.

On a posé $t = \sqrt{2} \tan(\theta)$ ce qui donne $\tan(\theta) = \dots\dots$ et $\theta = \dots\dots\dots$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{2 \sin(\theta) \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2 \tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

donc

$$\phi(t) = \dots\dots\dots$$

.....

On obtient finalement comme on a posé $t = x - 1$

$$G(x) = \dots\dots\dots$$

.....

et donc $F(x) = \dots\dots\dots$

.....

Annexe A - Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$\sqrt[n]{x}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	\mathbb{R}_+^*
$\sqrt[n]{x}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	\mathbb{R}^*
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}_+^*
\sqrt{x}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}_+^*	e^x	\mathbb{R}
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	\mathbb{R}	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	\mathbb{R}	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\operatorname{ch}(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	\mathbb{R}	$[1, +\infty[$	$\operatorname{sh}(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	\mathbb{R}	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	\mathbb{R}
$\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, +\infty[$	$[0, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$] -1, 1[$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1, 1[$

On considère une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Fonction	Domaine de définition	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	I	$nu'u^{n-1}$	I
$\frac{1}{u^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\frac{1}{u}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$
\sqrt{u}	$\{x \in I : u(x) \geq 0\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$
e^u	I	$u'e^u$	I
$\ln(u)$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$	$\frac{u'}{u}$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$
$\cos(u)$	I	$-u' \sin(u)$	I
$\sin(u)$	I	$u' \cos(u)$	I
$\tan(u)$	$\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin(u)$	$\{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arccos(u)$	$\{x \in I : u(x) \in [-1, 1]\}$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\{x \in I : u(x) \in]-1, 1[\}$
$\arctan(u)$	I	$\frac{u'}{1+u^2}$	I

Annexe B - Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Domaine de validité
a (réel donné)	ax	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbb{R}^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$] -1, 1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	\mathbb{R}

Fonction	Primitive
$u'u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$