Chapitre 5 : Équations différentielles

Caroline Bauzet*

1er octobre 2021

De nombreux problèmes d'origine physique, économique ou biologique conduisent à chercher une fonction y dépendant d'une variable t sachant qu'il existe une relation entre y, t et éventuellement d'autres dérivées successives de y ($y'', ...$). Une telle relation est appelée équation différentielle :

$$y^2(t) - (y'(t))^2 = 1$$

$$ty(t)y'(t) = y^2(t) - t^2$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t}\sin(t).$$

Exemple ***: La cinétique chimique :*** *Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps de concentrations, de quantités de matière (nombres de moles) ou encore de pressions partielles. Les réactions d'ordre 1 mènent par exemple à l'équation différentielle suivante :*

$$y'(t) = -ky(t),$$

où k une constante donnée et y représente la concentration d'un composé chimique.

L'objectif de ce cours est d'apprendre à résoudre une classe bien précise d'équations différentielles, c'est à dire trouver l'expression de la fonction inconnue y.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues données. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre qui sont des équations de la forme :

$$\text{..} \quad t \in I, \tag{1}$$

où l'inconnue du problème est une fonction dérivable notée $y : I \to \mathbb{R}$ qui dépend de la variable t.

. On dit que cette équation est une équation différentielle car elle fait intervenir des dérivées de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est du **1er ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **première** de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est linéaire car l'équation homogène associée donnée par

$$\text{..} \quad t \in I, \tag{2}$$

possède la propriété de linéarité suivante :

1. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, caroline.bauzet@univ-amu.fr

Propriété *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (2), alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire de y_1 et y_2 donnée par*

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore solution de (2). En particulier, la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est toujours solution de (2).

Remarque *Attention, la propriété précédente n'est pas vraie pour les solutions de (1) : si y_1 et y_2 sont deux solutions de (1), en général, $\alpha y_1 + \beta y_2$ n'est pas solution de (1).*

L'objectif de cette première partie est d'apprendre à résoudre les équations (1) et (2).

1.1 Équations homogènes $y'(t) - a(t)y(t) = 0$

On dit qu'une équation différentielle de la forme $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$ est **homogène** lorsque l'on considère comme second membre une fonction g identiquement nulle, ce que l'on note $g \equiv 0$.

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle solution sur I de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0, \quad t \in I$$

toute fonction f dérivable sur I et telle que $\forall t \in I$, $f'(t) - a(t)f(t) = 0$.

Théorème 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toute solution f de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0, \quad t \in I$$

est de la forme ....

....

....

Preuve. On démontre l'équivalence en deux temps :

. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t) = Ce^{A(t)}$ est bien solution de l'équation car elle vérifie $\forall t \in I$

$f'(t) - a(t)f(t) =$ ....

....

....

. Réciproquement, si f est une solution de l'équation, on pose pour tout $t \in I$, $\varphi(t) =$ ....
Alors, φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t) =$ ....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

La fonction $a : t \mapsto$ .... *est continue sur* $I =$ .... *et admet pour primitive* $A : t \mapsto$ .... *Ainsi toute solution est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est de la forme*

$$f(t) = \text{...............................}$$

1.2 Équations non homogènes $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

Définition *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On appelle solution sur* I *de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction f *dérivable sur* I *et telle que* $\forall t \in I,\ f'(t) - a(t)f(t) = g(t)$.

Théorème 2 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues.* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

où $A : I \to \mathbb{R}$ *est une primitive de la fonction* $a : I \to \mathbb{R}$ *et* $C \in \mathbb{R}$ *est une constante.*

Preuve. Soient f et f_p deux solutions de l'équation $(\star)$, on pose $\varphi =$ .... Alors φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)$=...

=...

=...

=...

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Remarque *Ce théorème nous dit que toute solution de l'équation* $(\star)$ *se décompose comme somme d'une solution particulière de* $(\star)$ *et d'une solution de l'équation homogène associée à* $(\star)$.

Exemple *On considère l'équation différentielle sur* $\mathbb{R}$

$$y'(t) + 2y(t) = 4. \qquad (\star)$$

Chercher une solution particulière f_p *sous la forme* $f_p(t) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ *puis résoudre l'équation* $(\star)$. . . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Cherchons une solution de l'équation homogène. On a

. . . .

La fonction $a : t \mapsto$ .... *est continue sur* $I =$ .... *est admet pour primitive* $A : t \mapsto$ ...., *toute solution* f_h *de l'équation homogène est donc de la forme*

$$f_h(t) = \text{....................................}$$

Finalement, toute solution de l'équation $(\star)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est de la forme*

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = \text{...}$$

1.3 Recherche de solutions particulières pour $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

1.3.1 Cas particuliers : si $a(t) = a \in \mathbb{R}$

Selon la forme du second membre g, on peut chercher des solutions particulières spécifiques.

- . . . .

  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  $$P \text{ ....} \begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

- . . . .

  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  $$P \text{ ....} \begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$$

- ....

  On cherche une solution particulière sous la même forme, *i.e*

  $$f_p(t) = \text{..}$$

- g est une somme de plusieurs fonctions du type précédent :
  Si on considère le cas où g se décompose en somme de deux fonctions $g = g_1 + g_2$ avec g_1 et g_2

  correspondant à un des cas précédents, ...

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  Si g est la somme de n fonctions, on procède de la même façon en cherchant n solutions particulières aux n équations correspondantes.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}. \qquad (\star)$$

Les fonctions $a : t \mapsto$ .... *et* $g : t \mapsto$ .... *sont continues sur* $I =$ .... *On commence par résoudre l'équation homogène :*

....

La fonction a *admet pour primitive* $A : t \mapsto$ ...., *ainsi toute solution de l'équation homogène s'écrit*

$$f_h(t) = \text{................................}$$

Comme a *est une constante, on cherche une solution particulière sous la forme* $f_p(t) =$ ....
On a pour tout t *dans* I

$f_p'(t) + 3f_p(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow$ ....,

$f_p(t) =$ .... *est bien une solution particulière. Finalement, toute solution de* $(\star)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \text{..}$$

1.3.2 Méthode générale : variation de la constante

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On appelle « méthode de variation de la constante » la méthode qui consiste à chercher une solution particulière f_p de l'équation sur I

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t). \qquad (\star)$$

L'idée de la méthode est la suivante : on sait que les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

s'écrivent sous la forme

$$f_h(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \forall t \in I$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $a : I \to \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ est une constante, et on va chercher une solution particulière f_p de l'équation $(\star)$ sous la forme

$$f_p(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où φ est ....

....

La constante C est remplacée par la fonction φ, d'où le nom de « variation de la constante ». On a alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) - a(t)f_p(t) = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il suffit alors de trouver une primitive de $t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$ pour conclure.
On peut résumer cela dans le résultat suivant :

Théorème 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Toute solution f de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), t \in I$$

est de la forme $\forall t \in I$

$$f(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $a : I \to \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ est une constante et $B : I \to \mathbb{R}$ est une primitive sur I de la fonction $t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$.

Remarque *Avant de se lancer dans les calculs de la méthode de la variation de la constante, on commence par regarder s'il n'existe pas des solutions particulières évidentes à notre équation. Par exemple si on considère l'équation suivante*

$$y'(t) - 2y(t) = 2,$$

sur $I =$ ...., *on voit bien qu'une solution particulière de cette équation est donnée par la fonction* $f_p(t) =$ ...., $\forall t \in \mathbb{R}$. *La fonction* $a : t \mapsto$ .... *est continue sur* I *et admet pour primitive* $A : t \mapsto$ ....., *ainsi toute solution de cette équation sera de la forme*

$$f(t) = \text{..}$$

Exemple *Résoudre sur* $I =]0, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$(1 + t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0. \tag{$\star$}$$

Écrivons $(\star)$ *sous la forme* .... *:*

$$\forall t \in I, (\star) \Leftrightarrow \text{...},$$

les fonctions $a : t \mapsto$ .... *et* $g : t \mapsto$ .... *sont continues sur* I. *La fonction* a *admet pour primitive*

....

....

....

....

....

....

....

....

Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation $(\star)$ *: on la cherche sous la forme*

$$f_p(t) = \text{................................}$$

Alors

$\forall t \in I, f_p'(t) =$...

....

et donc

$$f_p'(t) + \frac{t}{1+t^2} f_p(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{..}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{..}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{..}$$

Ainsi, en prenant $B =$ ...., $f_p(t) =$ .... *convient. Les solutions de* $(\star)$ *sur* I *sont donc de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

1.4 Équations avec conditions initiales

Il s'agit d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

. . . .

Cette information y_0 sur la valeur de la solution y en $t = 0$ nous permet d'identifier les constantes $C \in \mathbb{R}$ apparaissant dans la forme des solutions de l'équation.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) + 3y(t) & = & 2e^{-t} \qquad (\star) \\ y(0) & = & 0, \end{array}\right.$$

Nous avons vu que toute solution de l'équation $(\star)$ *est de la forme* $f(t) =$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque *Il arrivera que la condition initiale ne porte pas sur la valeur de la solution en* $t = 0$ *mais en d'autres valeurs de* $t \in I$*, par exemple : l'équation différentielle*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) + 3y(t) & = & 2e^{-t} \qquad (\star) \\ y(1) & = & 0, \end{array}\right.$$

admet une unique solution. En effet, comme précédemment, $f(t) = Ce^{-3t} + e^{-t}, C \in \mathbb{R}$ *est solution de* $(\star)$

et . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui sont des équations de la forme :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad t \in I. \tag{3}$$

. On dit que cette équation est du **second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **seconde** de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considèrerons que des coefficients constants devant les membres y, y' y'' de l'équation.

Nous allons voir comment résoudre cette équation (3) : dans le cas homogène *i.e* lorsque $g = 0$ puis dans le cas non homogène lorsque $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non-identiquement nulle.

2.1 Quelques rappels

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On considère dans la suite le polynôme de degré 2 suivant : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On dit que z_0 est une racine de P si on a $P(z_0) = 0$ c'est à dire si $az_0^2 + bz_0 + c = 0$.
On a le résultat suivant :

Théorème *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Le polynôme de degré 2 défini par : $P(z) = az^2 + bz + c$, possède au plus deux racines données par*
. Si $\Delta = 0$, on a une racine double réelle $x = \frac{-b}{2a}$.
. Si $\Delta > 0$ on a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

*. Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes **conjuguées** :*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La factorisation du polynôme est donnée par la formule, en notant z_1, z_2 les racines du polynôme

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

2.2 Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle solution de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

toute fonction f deux fois dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$.

Définition *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

le polynôme $P_c : z \mapsto z^2 + az + b$.

Théorème 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \qquad (\star)$$

1) ....,

toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme, $\forall t \in I$

$f(t) =$ ....

2) ....,

toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme, $\forall t \in I$

$f(t) =$ ....

3) ....,

.... *toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme, $\forall t \in I$*

$f(t) =$ ....

Remarque *Lorsque P_c a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2, les solutions de $(\star)$ peuvent aussi s'écrire sous la forme $\forall t \in I$*

$$f(t) = K_1 e^{z_1 t} + K_2 e^{z_2 t}, \text{ avec } K_1, K_2 \in \mathbb{C},$$

grâce à l'égalité $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)).$$

Exemple *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0. \quad (\star)$* ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.3 Équations non homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle solution sur I de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction f deux fois dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$.

Théorème 5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ et f_p une solution particulière de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t). \qquad (\star)$$

1) *Si P_c a une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

....

2) *Si P_c a deux racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme* ....

3) *Si P_c a deux racines complexes distinctes $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

....

2.4 Recherche de solutions particulières pour $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), a, b \in \mathbb{R}$

- g est un polynôme de degré n : on cherche f_p sous la forme $f_p(t) =$ .... où

P .... $\begin{cases} \text{..........} & \text{si } b \neq 0 \\ \text{..........} & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0. \\ \text{..........} & \text{si } a = b = 0. \end{cases}$

- $\forall t \in I, g(t) = e^{\lambda t}Q(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q un polynôme de degré n : on cherche f_p sous la forme $f_p(t) =$ .... où

P .... $\begin{cases} \text{..........} & \text{si ....} \\ \text{..........} & \text{si ....} \\ \text{..........} & \text{si ....} \end{cases}$

Exemple *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $y''(x) + y'(x) + y(x) = x$ *avec conditions initiales* $y'(0) = y(0) = 0$. *Indication : chercher une solution particulière sous la forme* $y(x) = ax + b$ *où* a, b *sont des constantes à déterminer.*