Chapitre 5 : Espaces probabilisés

Table des matières

1 Introduction

1.1 Expérience aléatoire, univers et évènements

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne connait pas son résultat par avance et si elle peut donner des résultats différents lorsqu'elle est répétée dans les mêmes conditions.

Définition 1 *À une expérience aléatoire donnée est lié un ensemble de possibilités. L'ensemble de ces possibilités est appelé univers et est noté* Ω.

Remarque 2 *L'univers* Ω *associé à une expérience aléatoire est aussi appelé univers des possibles ou ensemble des éventualités ou encore espace des issues.*

Exemples 3
1. On lance un dé à 6 *faces et on note le résultat obtenu.* . . . .

. . . .

2. On lance deux fois un dé à 6 *faces et on note dans l'ordre les résultats obtenus. On a*

$\Omega =$. . . . .

Définitions 4 *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire donnée.*

1. *On appelle évènement élémentaire de l'univers Ω tout élément ω de Ω. On a $\omega \in \Omega$.*
2. *On appelle évènement de l'univers Ω tout sous-ensemble A de Ω. On a $A \subset \Omega$.*

Remarque 5 *Autrement dit, tout événement A est un ensemble d'évènements élémentaires.*

Exemple 6 *Reprenons l'exemple précédent : $\omega = (3,4) \in \Omega$ est un évènement élémentaire de Ω. Notons A l'évènement « Obtenir 5 puis 6 » et B l'évènement « Obtenir une somme supérieure à 10 ». .*

....

....

Définition 7 *Deux évènements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.*

1.2 Correspondances entre terminologie ensembliste et probabiliste

Nous l'avons compris, la théorie des probabilités repose sur la notion d'ensemble. Voici quelques correspondances de vocabulaire entre ces deux branches des mathématiques.

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
Résultat possible ω	$\omega \in \Omega$
Évènement A	$A \subset \Omega$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
Évènement contraire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Évènement impossible	$\varnothing$
Évènement certain	Ω
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

Exemple 8 *On lance un dé à 6 faces. On note A l'évènement « Obtenir un nombre pair » et B l'évènement « Obtenir un multiple de 3 ».*
Déterminer l'univers des possibles Ω et les évènements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{A}$.
• $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
• $A = \{2,4,6\}$.
• $B = \{3,6\}$.
• $A \cap B = \{6\}$ *est l'évènement « Obtenir un nombre pair multiple de 3 ».*
• $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ *est l'évènement « Obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 ».*
• $\overline{A} = \{1,3,5\}$ *est l'évènement « Obtenir un nombre impair ».*
• Ω *est l'évènement « Obtenir un entier compris entre 1 et 6 ». On l'appelle l'évènement certain.*
• *« Obtenir un nombre supérieur à 7 » est un évènement impossible noté $\varnothing$.*

2 Espaces probabilisés

2.1 Notion de tribu

Dans les faits, les évènements que nous considérons ne sont pas pris n'importe comment dans $\mathcal{P}(\Omega)$, mais ils appartiennent à un sous-ensemble particulier de $\mathcal{P}(\Omega)$ que l'on appelle tribu.

Définition 9 *Pour tout ensemble Ω et toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathscr{A}$ est une tribu associée à Ω si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$.
2. *Si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$.*
3. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.*

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable.

Remarques 10 *1) Attention, $\mathscr{A}$ n'est pas un sous-ensemble de Ω mais un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. Cela signifie que les éléments de $\mathscr{A}$ sont des sous-ensembles de Ω.*
2) Dans la définition d'une tribu, la condition 1. signifie que $\mathscr{A}$ est non vide, la condition 2. signifie que $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire et la 3. signifie que $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable.
3) Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés les événements de $(\Omega, \mathscr{A})$.

Exemples 11 ....

....

....

....

2.2 Système complet d'évènements

Définition 12 *On appelle système complet d'évènements (s.c.e) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ tout ensemble d'évènements $\{A_1, ..., A_n\}$ tel que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, ..., n\} \text{ tels que } i \neq j.$$

Exemples 13 *1. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de l'univers Ω.* ....

....

....

2. Sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on considère les évènements ....

....

....

3. On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et les évènements $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{6\}$ et $A_4 = \{5, 6\}$.

....

....

....

2.3 Probabilité d'un évènement

Définition 14 *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ incompatibles deux à deux,* $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilités.

Remarques 15 *1) Dire que les éléments $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles deux à deux signifie que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.*
2) Si Ω est un ensemble fini on peut remplacer la condition 2. de la définition par

$$\forall A, B \in \mathscr{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

3) Quand Ω est fini ou dénombrable, la probabilité $\mathbb{P}$ est caractérisée par la connaissance pour tout $\omega \in \Omega$ de $\mathbb{P}(\{\omega\})$. En effet, tout évènement A peut alors s'écrire comme une réunion disjointe $A = \bigcup\limits_{\omega\in A} \{\omega\}$ et alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{\omega\in A} \{\omega\}) = \sum\limits_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Proposition 16 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.*

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

Remarque 17 *Comme une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1, on en déduit que*

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Preuve. Nous allons utiliser la propriété suivante vérifiée par définition par $\mathbb{P}$:

$$\forall A_1, A_2 \in \mathscr{A}, A_1 \cap A_2 = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2). \quad (\star)$$

1. Comme $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, en utilisant $(\star)$, on a

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) = 2\mathbb{P}(\varnothing) \text{ donc } \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

2. Comme $A \cup \overline{A} = \Omega$ on en déduit que $\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Par définition, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et en utilisant encore $(\star)$ on obtient

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \text{ ce qui donne bien } \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

3. Supposons $A \subset B$. Alors on peut écrire B sous forme d'une réunion disjointe $B = (B \setminus A) \cup A$ et en utilisant $(\star)$ on obtient

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big((B \setminus A) \cup A\big) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(A).$$

4. On peut écrire A et $A \cup B$ sous forme de réunions disjointes : $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$. Grâce à $(\star)$ on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B),$$

ce qui donne bien $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. ■

2.4 Hypothèse d'équiprobabilité

Définition 18 *Soient Ω un ensemble fini et $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On dit que $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé équiprobable s'il est muni de la probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ définie par*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}, \forall A \in \mathscr{A}.$$

Remarque 19 *Dans le cas d'un espace probabilisé équiprobable, chaque évènement élémentaire $\omega \in \Omega$ possède la même probabilité de réalisation donnée par $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{Card(\Omega)}$. C'est ce qu'on appelle l'hypothèse d'équi-probabilité.*
En pratique si rien n'est mentionné, on fait implicitement une hypothèse d'équiprobabilité.

Exemple 20 *Reprenons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dés. On a*

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{(1,1),(1,2),....,(6,6)\} \text{ et } Card(\Omega) = 6 \times 6 = 36.$$

Notons A l'évènement « Obtenir une somme supérieure à 10 ». ....

....

....

....

....

....

....

Remarque 21 *Attention, l'hypothèse d'équi-probabilité ne peut pas toujours être utilisée comme nous le montre le contre-exemple suivant :*
On lance une pièce de monnaie deux fois et on collecte sans tenir compte de l'ordre les résultats obtenus. On peut considérer l'univers des possibles suivant en notant P pour « Pile » et F pour « Face » :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Introduction

Problématique : On considère A et B deux évènements. Quelle est la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé ? Nous avons besoin pour répondre à cette question d'introduire le concept de probabilité conditionnelle.

Définition 22 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.*

Remarque 23 *$\mathbb{P}(.|B)$ peut aussi se noter $\mathbb{P}_B(.)$. Notons que $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}_B)$ est un espace probabilisé car P_B induit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. En effet, $\mathbb{P}_B : \mathscr{A} \to [0,1]$ et $\mathbb{P}_B\big(\Omega\big) = \mathbb{P}(\Omega|B) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ et pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ incompatibles deux à deux,*

$$\mathbb{P}_B\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)|B\Big) = \frac{\mathbb{P}\big((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap B\big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B)\Big)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n|B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_n).$$

Exemple 24 *Reprenons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé. Notons A l'évènement « Obtenir une somme supérieure à 10 » et B l'évènement « Le 1er dé donne 6 ».. On a*

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\},\ \textit{Card}(\Omega) = 36 \textit{ et } A = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6), (4,6), (6,4)\}.$$

Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise sachant que B est réalisé ? L'évènement que l'on connait est le suivant : ....

....

....

....

....

3.2 Propriétés

Proposition 25 *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.*

1. ....

2. ....

3. ....

4. ....

Preuve. 1. Notons que $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ avec $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$, d'où $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}((\overline{A} \cap B)$ et alors

$$\mathbb{P}(\overline{A}|B) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \mathbb{P}(A|B).$$

2. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

3. $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

4. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B)$.

■

Exemple 26 *On tire successivement et sans remise deux boules d'une urne contenant* 10 *boules rouges et* 5 *boules blanches. Quelle est la probabilité d'obtenir* 2 *boules rouges ?*

....

....

....

....

....

....

....

....

3.3 Formule des probabilités complètes

Proposition 27 *(Formule des probabilités complètes)*
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $B \in \mathscr{A}$ et $\{A_1, ..., A_n\}$ un système complet d'évènements sur $(\Omega, \mathscr{A})$ tel que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i).$$

Remarque 28 *Ce résultat s'appelle aussi la formule des probabilités totales. Attention, pour utiliser cette formule il faut vérifier que $\{A_1, ..., A_n\}$ forme bien un système complet d'évènements.*

Preuve. Pour i variant de 1 à n on sait que les évènements (A_i) sont deux à deux disjoints par définition. On en déduit que les évènements $(B \cap A_i)$ sont également deux à deux disjoints. On a alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}\big(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\big) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i).$$

■

Exemple 29 *On considère un groupe de* 1000 *personnes. On s'intéresse à l'évènement* B *: « La personne est pré-disposée à souffrir de migraine ».*
1. On suppose que la population comporte 300 *hommes et* 700 *femmes. La probabilité de réaliser* B *chez les hommes est de* $0,4$ *et chez les femmes elle est de* $0,8$*. On note* A_1 *l'évènement « La personne choisie est une femme » et* A_2 *l'évènement « La personne choisie est un homme ». À l'aide de ces informations, peut-on calculer* $\mathbb{P}(B)$ *?*

....

....

....

....

....

....

....

....

2. On suppose que dans la population, 800 *personnes boivent et* 700 *fument. La probabilité de réaliser* B *chez les buveurs est de* $0,9$ *et chez les fumeurs elle est de* $0,7$*. On note* A_1 *l'évènement « La personne choisie est un buveur » et* A_2 *l'évènement « La personne choisie est un fumeur ». À l'aide de ces informations, peut-on calculer* $\mathbb{P}(B)$ *?*

....

....

....

....

....

....

3.4 Formule de Bayes

Proposition 30 *(Formule de Bayes)*
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $B \in \mathscr{A}$ *et* $\{A_1, ..., A_n\}$ *un système complet d'évènements sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *tel que* $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$*. Si* $\mathbb{P}(B) \neq 0$*, alors*

$$\forall k \in \{1, ..n\},\ \mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)\right)}.$$

Preuve. En utilisant la formule des probabilités complètes, on sait que $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)$ et alors $\forall k \in \{1, ..n\}$,

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)\right)}.$$

■

Exemple 31 *Dans une boîte, on dispose de* 20 *dés dont* 5 *sont truqués de manière à ce que le résultat* 1 *ait la probabilité* $\frac{1}{3}$ *d'apparaître. On prend un dé au hasard, on le lance et on obtient le résultat* 1*. Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué ?*
Notons A *l'évènement : « Le dé est truqué » et* B *l'évènement « Le résultat du lancer de dé est* 1*. »*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4 Notion d'indépendance d'évènements

On considère deux évènements A et B qui n'ont aucune influence l'un sur l'autre c'est à dire des évènements qui se réalisent (ou non) indépendamment l'un de l'autre. Comment traduire cette notion d'indépendance mathématiquement ?

Définition 32 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathscr{A}$*. On dit que les évènements* A *et* B *sont* <u>*indépendants*</u> *si et seulement si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ *et on note* $A \perp B$*.*

Proposition 33 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathscr{A}$.

1. ....

2. ....

Preuve. Immédiate en utilisant la définition des probabilités conditionnelles. ∎

Remarque 34 *Attention à ne pas confondre la notion d'incompatibilité entre deux évènements* A *et* B *c'est à dire lorsque* $A \cap B = \varnothing$ *avec la notion d'indépendance entre* A *et* B*, c'est à dire lorsque* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Proposition 35 *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathscr{A}$. *On a les équivalences suivantes :*

$$A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad A \perp \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \perp B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \perp \overline{B}.$$

Preuve. Il s'agit d'une application de la Proposition 33. ∎

Exemple 36 *On considère une population de 20.000 personnes sur laquelle on possède les informations suivantes :*

	Malades	*Sains*
Fumeurs	400	4600
Non-fumeurs	600	14400

On note A *l'évènement : « La personne fume ».*
On note B *l'évènement « La personne est malade ».*
Les évènements A *et* B *sont-ils indépendants ?* ..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

L1 MCPI 2019-2020

Analyse et Probabilités

PLANCHE 5

Espaces Probabilisés

Exercice 1. Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une classe de n élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. On suppose dans cette question que $n = 366$. Quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ?
2. On suppose dans cette question que $n \leqslant 365$.
   (a) Quelle est la probabilité p_n pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ?
   (b) Trouver le plus petit entier n_1 tel que $p_{n_1} \geqslant 0,5$.
3. Quelle est la probabilité q_n qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que son enseignant ? Calculer q_{366}.

Exercice 3. Dans une classe où tous les élèves pratiquent un sport et un seul, il y a 13 filles et 15 garçons répartis comme suit :

- 4 filles et 6 garçons font du vélo.
- 3 filles et 4 garçons font de la course à pieds.
- 6 filles et 1 garçon font de la gymnastique.
- Les autres garçons font du football.

On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :
A : « L'élève choisi est une fille. »
B : « L'élève choisi est un garçon. »
C : « L'élève choisi fait du vélo. »

1. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « L'élève choisi est un garçon et fait du football » ?
3. Sachant que l'élève choisi fait de la gymnastique, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
4. Sachant que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse de la course à pieds ?

Exercice 4. Cinq chimistes disposent de quatre produits chimiques p_1, p_2, p_3, p_4. À tour de rôle, ils versent dans un même récipient une dose d'un produit chimique qu'ils choisissent au hasard, sans savoir ce que les précédents ont choisi. Le même produit peut alors être choisi plusieurs fois. En mélangeant deux doses de p_1, une dose de p_2 et deux doses de p_4, on obtient un explosif très instable.

1. Déterminer la probabilité que les chimistes aient obtenu le mélange explosif.
2. Sachant que le premier chimiste a versé une dose de p_1 et que le second a versé une dose de p_4, quelle est la probabilité d'obtenir le mélange explosif ?

Exercice 5. Une urne contient 6 boules blanches et 10 boules noires. On effectue 4 tirages successifs et <u>sans remise</u> d'une boule. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : 1 boule noire, 1 boule noire, 1 boule noire, 1 boule blanche.

Exercice 6. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$. On considère les évènements suivants :
A : « La chaudière est sous garantie ».
B : « La chaudière est défectueuse ».
C : « La chaudière est sous garantie et est défectueuse ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
2. Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

Exercice 7. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges. Si on tire une boule bleue, on lance la roue bleue. Si on tire une boule rouge, on lance la roue rouge. Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand une roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur. Tous les secteurs ont la même chance d'être « choisis » par la flèche.
<u>Secteurs roue bleue :</u> Perdu, Gagné 2€, Perdu, Gagné 10€, Perdu, Gagné 4€, Perdu, Gagné 2€.
<u>Secteurs roue rouge :</u> Perdu, Gagné 6€, Perdu, Gagné 2€, Perdu, Perdu, Perdu, Gagné 2€.
On considère les évènements suivants :

- B : « Tirer une boule bleue ».
- R : « Tirer une boule rouge ».
- G : « Gagner ».
- D : « Gagner 2€ ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$ puis $\mathbb{P}(R)$.
2. On a tiré une boule bleue. Quelle est la probabilité de gagner ?
3. Calculer $\mathbb{P}(G)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(D)$.
5. Sachant que l'on a gagné 2€, quelle est la probabilité que l'on ait lancé la roue bleue ?

Exercice 8. À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité anti-dopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part, certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part, certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif. Le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur. On note

- D l'évènement « Le sportif est dopé ».
- O l'évènement « Le sportif est déclaré positif ».
- E l'évènement « Le comité a commis une erreur ».

1. Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs, 50% ne sont pas dopés et que le comité déclare positifs 20% des sportifs indépendamment du fait que le sportif soit dopé ou non. On choisit un sportif au hasard. Calculer :
   (a) La probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif.
   (b) La probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif.
   (c) La probabilité $\mathbb{P}(E)$.
2. Dans cette question, on note p la proportion de dopés parmi les sportifs. On suppose que la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif soit réellement dopé ou non. On possède les informations suivantes :
   - La probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est de $0,9$.
   - La probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est de $0,1$.

   On choisit un sportif au hasard. Calculer :
   (a) La probabilité $\mathbb{P}(E)$.
   (b) En fonction de p, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.
   (c) On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé. Montrer que cette probabilité est de $\dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$.