

# Chapitre 5 : Équations différentielles

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants</b>	<b>2</b>
1.1	Équations homogènes $y'(t) - ay(t) = 0$	2
1.2	Équations non homogènes $y'(t) - ay(t) = g(t)$	3
1.3	Recherche de solutions particulières pour $y'(t) - ay(t) = g(t)$	4
1.3.1	Cas particuliers	4
1.3.2	Méthode générale : variation de la constante	5
1.4	Équations avec conditions initiales	7
<b>2</b>	<b>Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants</b>	<b>8</b>
2.1	Quelques rappels	8
2.2	Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, a, b \in \mathbb{R}$	9
2.3	Équations non homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), a, b \in \mathbb{R}$	9
<b>A</b>	<b>Exercices</b>	<b>11</b>
A.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	11
A.2	Équations différentielles linéaires du second ordre	11
A.3	Modélisation et équations différentielles non linéaires	12

De nombreux problèmes d'origine physique, économique ou biologique conduisent à chercher une fonction  $y$  dépendant d'une variable  $t$  sachant qu'il existe une relation entre  $y, t$  et éventuellement d'autres dérivées successives de  $y$  ( $y'', \dots$ ). Une telle relation est appelée équation différentielle :

$$y^2(t) - (y'(t))^2 = 1$$

$$ty(t)y'(t) = y^2(t) - t^2$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t} \sin(t).$$

**Exemple : La cinétique chimique :** Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps de concentrations, de quantités de matière (nombres de moles) ou encore de pressions partielles. Les réactions d'ordre 1 mènent par exemple à l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = -ky(t),$$

où  $k$  une constante donnée et  $y$  représente la concentration d'un composé chimique.

L'objectif de ce cours est d'apprendre à résoudre une classe bien précise d'équations différentielles, c'est à dire trouver l'expression de la fonction inconnue  $y$ .

# 1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $a \in \mathbb{R}$  un réel et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue donnée. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre qui sont des équations de la forme :

$$y'(t) - ay(t) = g(t) \quad t \in I, \quad (1)$$

où l'inconnue du problème est une fonction dérivable notée  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui dépend de la variable  $t$ .

- . On dit que cette équation est une équation différentielle car elle fait intervenir des dérivées de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est du **1er ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **première** de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considérerons que des coefficients constants devant les membres  $y, y'$  de l'équation.
- . On dit qu'elle est linéaire car l'équation homogène associée donnée par

$$y'(t) - ay(t) = 0 \quad t \in I, \quad (2)$$

possède la propriété de linéarité suivante :

**Propriété** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de (2), alors pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la fonction combinaison linéaire de  $y_1$  et  $y_2$  donnée par

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore solution de (2). En particulier, la fonction identiquement nulle  $y \equiv 0$  est toujours solution de (2).

**Remarque** Attention, la propriété précédente n'est pas vraie pour les solutions de (1) : si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions de (1), en général,  $\alpha y_1 + \beta y_2$  n'est pas solution de (1).

L'objectif de cette première partie est d'apprendre à résoudre les équations (1) et (2).

## 1.1 Équations homogènes $y'(t) - ay(t) = 0$

On dit qu'une équation différentielle de la forme  $y'(t) - ay(t) = g(t)$  est **homogène** lorsque l'on considère comme second membre une fonction  $g$  identiquement nulle, ce que l'on note  $g \equiv 0$ .

**Définition** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle solution sur  $I$  de l'équation

$$y'(t) - ay(t) = 0, t \in I$$

toute fonction  $f$  dérivable sur  $I$  et telle que  $\forall t \in I$ ,

$$f'(t) - af(t) = 0.$$

**Théorème 1** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$  un réel. Toute solution  $f$  de l'équation

$$y'(t) - ay(t) = 0, t \in I \quad (*)$$

est de la forme

$$f(t) = Ce^{at}$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante.

**Preuve.** Soient  $f$  une solution de l'équation  $(*)$ , on pose  $\varphi : t \mapsto f(t)e^{-at}$ . Alors  $\varphi$  est dérivable et vérifie  $\forall t \in I$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■  
**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

L'équation est bien homogène linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec  $a = \dots$ . Ainsi toute solution est définie sur  $\mathbb{R}$  et est de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**1.2 Équations non homogènes**  $y'(t) - ay(t) = g(t)$

**Définition** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle solution sur  $I$  de l'équation

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I$$

toute fonction  $f$  dérivable sur  $I$  et telle que  $\forall t \in I$ ,

$$f'(t) - af(t) = g(t).$$

**Théorème 2** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $f_p$  est une solution particulière de l'équation

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I \tag{*}$$

alors toute solution de l'équation  $(*)$  s'écrit sous la forme

$$f(t) = Ce^{at} + f_p(t), \forall t \in I,$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante.

**Preuve.** Soient  $f$  et  $f_p$  deux solutions de l'équation  $(*)$ , on pose  $\varphi = f - f_p$ . Alors  $\varphi$  est dérivable et vérifie  $\forall t \in I$

$$\varphi'(t) - a\varphi(t) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 ..... ■

**Remarque** Ce théorème nous dit que toute solution de l'équation  $(*)$  se décompose comme somme d'une solution particulière de  $(*)$  et d'une solution de l'équation homogène associée à  $(*)$ .

**Exemple** On considère l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$

$$y'(t) + 2y(t) = 4. \tag{*}$$

Chercher une solution particulière  $f_p$  sous la forme  $f_p(t) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$  puis résoudre l'équation  $(*)$ . .....

.....  
 .....  
 .....

Cherchons une solution de l'équation homogène. Cette dernière vaut

.....

On identifie  $a = \dots\dots$ . Toute solution  $f_h$  de l'équation homogène est donc de la forme

$$f_h(t) = \dots\dots\dots$$

Finalement, toute solution de l'équation  $(*)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et est de la forme

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = \dots\dots\dots$$

### 1.3 Recherche de solutions particulières pour $y'(t) - ay(t) = g(t)$

#### 1.3.1 Cas particuliers

Selon la forme du second membre  $g$ , on peut chercher des solutions particulières spécifiques.

- Si  $g$  est un polynôme de degré  $n$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $f_p(t) = P(t)$  où

$$P \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} n \text{ si } a \neq 0 \\ n + 1 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

- Si  $g(t) = e^{\lambda t}Q(t), \forall t \in I$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $Q$  est un polynôme de degré  $n$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $f_p(t) = e^{\lambda t}P(t)$  où

$$P \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} n \text{ si } a \neq \lambda \\ n + 1 \text{ si } a = \lambda. \end{cases}$$

- Si  $g(t) = e^{\lambda t}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$ , avec  $\alpha, \beta, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$ , on cherche une solution particulière sous la même forme, i.e

$$f_p(t) = e^{\lambda t}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

avec  $A, B \in \mathbb{R}$  à déterminer.

**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}. \tag{*}$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire :

.....

On identifie  $a = \dots\dots$ . Toute solution de l'équation homogène s'écrit donc

$$f_h(t) = \dots\dots\dots$$

La fonction  $g : t \mapsto \dots\dots\dots$  est continue sur  $I = \dots\dots\dots$

On cherche une solution particulière, au vu de  $g$ , on va la chercher sous la forme  $f_\lambda(t) = \lambda e^{-t}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $t$  dans  $I$

$$f'_\lambda(t) + 3f_\lambda(t) = \dots\dots\dots$$

et donc

$$f'_\lambda(t) + 3f_\lambda(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

. On en déduit que  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  est une solution particulière. Finalement, toute solution de (\*) est définie sur  $\mathbb{R}$  et s'écrit sous la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**1.3.2 Méthode générale : variation de la constante**

On considère  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle « méthode de variation de la constante » la méthode qui consiste à chercher une solution particulière  $f_p$  de l'équation sur  $I$

$$y'(t) - ay(t) = g(t). \tag{*}$$

L'idée de la méthode est la suivante : on sait que les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) - ay(t) = 0$$

s'écrivent sous la forme

$$f_h(t) = Ce^{at}, \forall t \in I$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante, et on va chercher une solution particulière  $f_p$  de l'équation (\*) sous la forme

$$f_p(t) = \varphi(t)e^{at}$$

où  $\varphi$  est une fonction dérivable sur  $I$  à déterminer. La constante  $C$  est remplacée par la fonction  $\varphi$ , d'où le nom de « variation de la constante ». On a alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) - af_p(t) = g(t) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

On peut résumer cela dans le résultat suivant :

**Théorème 3** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Toute solution  $f$  de l'équation

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I$$

est de la forme

$$f(t) = e^{at}(B(t) + C),$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante et  $B : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive sur  $I$  de la fonction  $t \mapsto g(t)e^{-at}$ .

**Remarque** Avant de se lancer dans les calculs de la méthode de la variation de la constante, on commence par regarder s'il n'existe pas des solutions particulières évidentes à notre équation. Par exemple si on considère l'équation suivante

$$y'(t) - 2y(t) = 2,$$

sur  $I = \dots\dots\dots$ , on voit bien qu'une solution particulière de cette équation est donnée par la fonction constante  $f_p(t) = \dots\dots\dots, \forall t \in \mathbb{R}$ . Ainsi toute solution de cette équation sera de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**Exemple** Résoudre sur  $I = \mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'(t) + 2(1 + t^2)y(t) - e^{-2t} = 0. \tag{*}$$

Ici, les coefficients de  $y'(t)$  et  $y(t)$  ne sont pas constants, mais on peut remarquer qu'un même facteur dépendant de  $t$  apparait. De plus, ce facteur ne s'annule jamais, on a en effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t^2 \geq \dots\dots$  et donc  $1 + t^2 \geq \dots\dots > \dots\dots$ . On peut donc diviser par ce facteur, ce qui permet de réécrire (\*) sous la forme :  $\forall t \in I, y'(t) - ay(t) = g(t)$  avec  $a = \dots\dots\dots$  et  $g : t \mapsto \dots\dots\dots$ , qui est bien une fonction continue sur  $I$ . On sait que toute solution  $f_h$  de l'équation homogène est de la forme :

$$f_h(t) = \dots\dots\dots$$

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver une solution particulière de l'équation (\*) : d'après la méthode de la variation de la constante, on la cherche sous la forme

$$f_p(t) = \dots\dots\dots$$

Alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) = \dots\dots\dots$$

et donc

$$f_p'(t) + 2f_p(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Ainsi, en prenant  $\varphi(t) = \dots\dots\dots$ ,  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  convient. Les solutions de (\*) sur  $I$  sont donc de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

### 1.4 Équations avec conditions initiales

Il s'agit d'équations de la forme

$$\begin{cases} y'(t) - ay(t) = g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $y_0 \in \mathbb{R}$  est une constante donnée. Cette information  $y_0$  sur la valeur de la solution  $y$  en  $t = 0$  nous permet d'identifier les constantes  $C \in \mathbb{R}$  apparaissant dans la forme des solutions de l'équation.

**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t} \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (*)$$

Nous avons vu que toute solution de l'équation (\*) est de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

Parmi ces fonctions, la seule qui s'annule en 0 est

$$f_0(t) = \dots\dots\dots$$

C'est donc l'unique solution de l'équation avec condition initiale.

**Remarque** Il arrivera que la condition initiale ne porte pas sur la valeur de la solution en  $t = 0$  mais en d'autres valeurs de  $t \in I$ , par exemple : l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t} & (*) \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution. En effet, comme précédemment,  $f(t) = Ce^{-3t} + e^{-t}, C \in \mathbb{R}$  sont solutions de (\*) et .....

## 2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui sont des équations de la forme :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) \quad t \in I. \tag{3}$$

- . On dit que cette équation est du **second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **seconde** de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considérerons que des coefficients constants devant les membres  $y, y', y''$  de l'équation.

Nous allons voir comment résoudre cette équation (3) : dans le cas homogène *i.e* lorsque  $g = 0$  puis dans le cas non homogène lorsque  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue non-identiquement nulle.

### 2.1 Quelques rappels

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . On considère dans la suite le polynôme de degré 2 suivant :  $P(z) = az^2 + bz + c$ . On dit que  $z_0$  est une racine de  $P$  si on a  $P(z_0) = 0$  c'est à dire si  $az_0^2 + bz_0 + c = 0$ . On a le résultat suivant :

**Théorème** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Le polynôme de degré 2 défini par :  $P(z) = az^2 + bz + c$ , possède au plus deux racines données par

- . Si  $\Delta = 0$ , on a une racine double réelle  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- . Si  $\Delta > 0$  on a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- . Si  $\Delta < 0$ , on a deux racines complexes **conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La factorisation du polynôme est donnée par la formule, en notant  $z_1, z_2$  les racines du polynôme

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$



## 2.2 Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ , $a, b \in \mathbb{R}$

**Définition** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On appelle solution de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  et telle que  $\forall t \in I$

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$$

**Définition** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

le polynôme  $P_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $P_c(x) = x^2 + ax + b$ .

**Théorème 4** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère  $P_c$  le polynôme caractéristique associé à l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \quad (*)$$

• Si  $P_c$  admet une racine réelle double  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors toutes les solutions de l'équation  $(*)$  sont de la forme

$$f(t) = (At + B)e^{\alpha t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

• Si  $P_c$  admet deux racines réelles distinctes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  alors toutes les solutions de l'équation  $(*)$  sont de la forme

$$f(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

• Si  $P_c$  admet deux racines complexes distinctes  $z_1 = \alpha + i\beta$  et  $z_2 = \alpha - i\beta$ , alors toutes les solutions de l'équation  $(*)$  sont de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

**Remarque** Lorsque  $P_c$  a deux racines complexes distinctes  $z_1$  et  $z_2$ , les solutions de  $(*)$  peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$f(t) = K_1 e^{z_1 t} + K_2 e^{z_2 t}$$

avec  $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$  en utilisant la formule

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha (\cos(\beta) + i \sin(\beta)).$$

## 2.3 Équations non homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$ , $a, b \in \mathbb{R}$

**Définition** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle solution sur  $I$  de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  telle que  $\forall t \in I$ ,  $f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$ .

**Théorème 5** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On considère  $P_c$  le polynôme caractéristique associé à l'équation  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$  et  $f_p$  une solution particulière de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t). \quad (*)$$

- Si  $P_c$  a une racine double  $\alpha \in \mathbb{R}$ , toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme

$$f(t) = (At + b)e^{\alpha t} + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

- Si  $P_c$  a deux racines réelles distinctes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme

$$f(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

- Si  $P_c$  a deux racines complexes distinctes  $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

## A Exercices

**Remarque** Les exercices et questions précédés du symbole  $\clubsuit$  sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

### A.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'(x) - 3y(x) = 0$ .
2.  $y'(x) + y(x) = 0$ .
3.  $3y'(x) + 2y(x) = 0$ .

**Exercice 2.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'(x) + y(x) = \cos(x)$ .
2.  $y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$ .
3.  $y'(x) + 3y(x) = x^3$ .
4.  $3y'(x) - 2y(x) = (x+1)e^x$ .
5.  $y'(x) + y(x) = 2xe^{-x}$ .
6.  $\clubsuit 2y'(x) + 3y(x) = e^x \sin(x)$ .

**Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'(x) + y(x) = \sin(2x)$  et  $y(0) = 1$
2.  $y'(x) + 2y(x) = 2e^{-2x}$  et  $y(1) = 0$ .
3.  $y'(x) - 3y(x) = e^{3x} \cos(x)$  et  $y(0) = 2$ .

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  et  $y(0) = 1$
2.  $y'(x) - 2y(x) = \arctan xe^{2x}$  et  $y(1) = 0$ .

### A.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

**Exercice 5.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ .
2.  $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ .
3.  $y''(x) - 4y(x) = 0$ .
4.  $9y''(x) - 6y'(x) = 0$ .
5.  $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$  avec  $y(0) = 1 = y'(0) = 1$ .
6.  $\clubsuit 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ .
7.  $\clubsuit 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$ .
8.  $\clubsuit 9y''(x) - 6y'(x) + y(x) = 0$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .

**Exercice 6.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y''(x) + y'(x) + y(x) = x$ .
2.  $y''(x) - y(x) = e^{2x}$  avec  $y(0) = y'(0) = 0$ .
3.  $y''(x) + y(x) = x + \operatorname{ch}(x)$ .
4.  $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 1$ .

5.  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$  avec  $y(0) = y'(0) = 0$ . (Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme  $y(x) = (Ax + B)e^{4x}$  où  $A, B$  sont des constantes).
6.  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2e^{-2x}$ . (Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme  $y(x) = P(x)e^{-2x}$  où  $P$  est un polynôme de degré 3).

### Exercice 7.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \quad (E_1)$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

2. On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \quad (E_2).$$

Montrer que  $f$  est solution de  $(E_2)$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_1)$  où  $g$  est défini par  $g(x) = e^x f(x)$  pour tout  $x$ . Puis résoudre  $(E_2)$ .

## A.3 Modélisation et équations différentielles non linéaires

**Exercice 8.** L'intensité  $I(t)$  qui parcourt un circuit constitué d'une résistance  $R$  (ohms) et d'une auto-inductance  $L$  (henrys) vérifie l'équation différentielle  $LI'(t) + RI(t) = E(t)$  où  $E(t)$  désigne la f.é.m appliquée aux extrémités. Résoudre l'équation différentielle lorsque  $E(t) = E_0$  constante, puis lorsque  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ .

**Exercice 9.** On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

**Exercice 10.** On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note  $N(t)$  le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant  $t$ , exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction  $N$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}(N(t))^2,$$

avec, comme condition initiale,  $N(0) = 1$ .

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par  $h = \frac{1}{N}$ .
2. Déterminer  $h$  puis  $N$ .
3. Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?