LIMIT LOADS OF HIGHLY HETEROGENEOUS STRUCTURES

O. DEBORDES*, C. LICHT**, J.J. MARIGO***, P. MIALON***, J.C. MICHEL, P. SUQUET**

* L.M.A. - C.N.R.S.
31, chemin Joseph Aiguier
13277 MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE

** Laboratoire de Mécanique Générale des Milieux Continus
U.S.T.L.
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE

*** E.D.F. - D.E.R./M.M.N.
1, avenue du Général de Gaulle
92141 CLAMART
FRANCE

Abstract. This work is devoted to the computations of limit loads for highly heterogeneous structures, made from the assembly of constituents with a limited strength. The definition of the homogenized or macroscopic yield locus is recalled, and its determination is reduced to a limit analysis problem on the unit cell. The essential features of this problem are boundary conditions of a periodic type, and a loading by the average of a field. Three methods accounting for the periodicity relations are proposed. The loading by the average is imposed by means of an additional node. The theory is satisfactorily compared with uniaxial tests on perforated sheets, and the results of numerical computations on biaxial tests are presented.

POSITION DU PROBLEME

1. Objectifs.

Ce travail est consacré à la détermination des charges limites de structures hétérogènes périodiques, i.e. au calcul des chargements que peut supporter une structure constituée de matériaux ductiles présentant des contraintes à rupture très différentes. Les composites à matrice métallique, les ouvrages en terre armée ou les plaques et coques raidies ou perforées, qui nous serviront d'illustration par la suite, donnent de bons exemples de telles situations.

Les matériaux qui constituent la structure hétérogène possèdent un *domaine de plasticité* qui est l'ensemble des états de contraintes physiquement acceptables, et que l'on note $P(x)$ au point x. La structure, qui occupe un domaine Ω, est soumise à un chargement volumique λf_o proportionnel à un paramètre de charge λ et encastrée sur son bord (par exemple). La charge limite λ_c est par définition la plus grande valeur de λ pour laquelle il est possible de trouver un champ de contraintes physiquement acceptable par le matériau et en équilibre avec λf_o :

$$(1)\quad \lambda_c = \sup\{\lambda \mid \exists \sigma \quad \begin{array}{ll} \sigma(x) \in P(x) & \forall\, x \in \Omega \text{ (comportement)} \\ \operatorname{div} \sigma(x) + \lambda f_o(x) = 0 & \forall\, x \in \Omega \text{ (équilibre)}\} \end{array}$$

On peut également donner une définition purement *cinématique* de λ_c (SALENCON[1]) :

$$(2)\quad \lambda_c = \inf_{u=0 \text{ sur } \partial\Omega} \left[\int_\Omega \pi(x,\varepsilon(u(x)))dx \Big/ \int_\Omega f_o(x)u(x)dx\right]$$

où $\pi(x,.)$ est la fonction d'appui de $P(x)$

$$(3)\quad \pi(x,\varepsilon) = \sup_{\tau \in P(x)} (\tau,\varepsilon)$$

On remarque que π est positivement homogène de degré 1 et singulière en $\varepsilon = 0$. Lorsque la structure est fortement hétérogène (par exemple plaque perforée) le calcul de λ_c par éléments finis nécessite une finesse de maillage qui rend prohibitif le coût des méthodes numériques usuelles. On cherche alors à remplacer le matériau fortement hétérogène par un matériau "homogénéisé" caractérisé par un domaine de plasticité P^{hom}, de sorte que le calcul de λ_c est remplacé par celui de λ_c^{hom}

$$(4)\quad \lambda_c^{hom} = \sup\{\lambda \mid \exists \Sigma \quad \begin{array}{ll} \Sigma(x) \in P^{hom} & \forall\, x \in \Omega \\ \operatorname{div} \Sigma(x) + \lambda f_o(x) = 0 & \forall\, x \in \Omega\} \end{array}$$

L'objet de ce travail est de décrire une méthode de calcul de P^{hom}, lorsque la structure considérée est *périodiquement hétérogène*

2. Homogénéisation. Méthode des moyennes.

Nous rappelons ci-dessous quelques unes des notations et des résultats essentiels de la théorie de l'homogénéisation que nous utiliserons, renvoyant le lecteur intéressé par plus de détails à HASHIN[2],

SANCHEZ-PALENCIA[3], SUQUET[4,5]. La structure périodique est obtenue par répétition d'une cellule de base notée V, et on y distingue deux échelles : l'échelle de la structure, dite macroscopique et notée x, et l'échelle de la cellule de base, dite microscopique et notée y. En un point x macroscopique on distingue les grandeurs macroscopiques (ou globales) qui règnent dans le milieu homogénéisé, (de propriétés encore inconnues) et les grandeurs microscopiques (ou locales) qui règnent dans le milieu hétérogène :

$\Sigma(x)$, $E(x)$ variables macroscopiques

$\sigma(x,y)$, $\varepsilon(x,y)$ variables microscopiques.

Les contraintes et déformations microscopiques et macroscopiques sont liées par

$$(5)\quad \Sigma_{ij} = \frac{1}{|V|}\int_{\partial V} \sigma_{ip} n_p y_j ds = \frac{1}{|V|}\int_{V^*} \sigma_{ij} dy = \langle\sigma_{ij}\rangle$$

$$(6)\quad E_{ij} = \frac{1}{|V|}\int_{\partial V} \frac{1}{2}(u_i n_j + u_j n_i) ds = \frac{1}{|V|}\int_{V^*} \varepsilon_{ij}(u) - \int_{\partial T} \frac{1}{2}(u_i n_j + u_j n_i) ds,$$

où les égalités de gauche sont valables pour des constituants quelconques, tandis que les égalités de droite détaillent les expressions obtenues lorsque les hétérogénéités sont des trous. On a noté V^* la partie de V occupée par le matériau, T le trou ($V^* = V-T$), ∂T le bord du trou et $\langle\ \rangle$ le symbole de moyenne sur V. On montre également que les champs de contraintes et de déformations microscopiques satisfont

$$(7)\quad \mathrm{div}_y \sigma = 0 \quad , \quad \sigma.n \text{ antipériodique sur } \partial V$$

$$(8)\quad \varepsilon(u) = E + \varepsilon(u^*) \quad , \quad u^* \text{ périodique sur } \partial V$$

$$(9)\quad \langle\tilde{\sigma}\,\tilde{\varepsilon}\rangle = \frac{1}{|V|}\int_V \tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{u}) = \tilde{\Sigma}_{ij}\tilde{E}_{ij}, \ \forall\ \tilde{\sigma},\tilde{u} \text{ vérifiant (7)(8).}$$

3. Domaine de plasticité macroscopique.

En chaque point y de la cellule de base V le matériau possède un domaine de plasticité P(y) dans lequel le tenseur de contraintes microscopiques $\sigma(y)$ est astreint à demeurer. Sa moyenne Σ ne peut donc être quelconque. *Par définition du matériau homogénéisé*, celui-ci ne pourra supporter une contrainte macroscopique Σ qu'à la condition qu'on puisse associer à Σ une contrainte microscopique σ supportable par le matériau hétérogène. Nous sommes alors conduit à la définition suivante du domaine de plasticité homogénéisé (voir MARIGO & al[6] pour plus de détails) :

$$P^{hom} = \{\Sigma \mid \exists\ \sigma\ ;\ \sigma(y) \in P(y) \quad \forall\ y \in V$$

$$(10)\qquad \mathrm{div}_y \sigma(y) = 0\ ,\ \sigma.n \text{ antipériodique (cf. (7))}$$

$$\langle\sigma\rangle = \Sigma\}$$

La détermination de P^{hom} suppose donc la résolution d'un *problème d'analyse limite sur la cellule de base*, analogue au problème (1) mais qui compte 6 paramètres de charge (les composantes de Σ) au lieu du seul paramètre λ. Il convient de noter que le chargement se

fait en moyenne, et que les conditions aux limites sont des conditions de périodicité. Il est également possible de caractériser P^{hom} de façon purement cinématique comme intersection de demi espaces :

$$P^{hom} = \bigcap_{\dot{E} \in \mathbb{R}^9_s} H(\dot{E}) = \{\Sigma^* \mid \Sigma^* \dot{E} \leq \pi^{hom}(\dot{E})\}$$

$$(11)\quad \pi^{hom}(\dot{E}) = \inf_{u^* \text{ périodique}} \langle\pi(y,\dot{E} + \varepsilon(u^*))\rangle = \sup_{\Sigma^* \in P^{hom}} \Sigma^* \dot{E}$$

4. Commentaires et notes bibliographiques.

Un exposé plus détaillé des raisonnements qui conduisent aux définitions (10) et (11) du domaine de plasticité peut être trouvé dans MARIGO & al[6] , SUQUET[4,5] . Signalons toutefois que l'idée d'utiliser les raisonnements d'analyse limite pour déterminer des bornes sur la résistance de milieux composites n'est pas nouvelle : cf SHU & ROSEN[7], M^c LAUGHLIN[8] , LE NIZHERY[9] par exemple. Les résultats ainsi obtenus ont été partiellement justifiés par une étude asymptotique[10] rigoureuse. Plus récemment DE BUHAN & al[11] ont développé ces résultats et leur application à la mécanique des sols.

Il convient cependant de noter que le domaine de plasticité P^{hom} ne permettra une bonne détermination des charges de rupture que lorsque les constituants du milieu hétérogène sont ductiles. On est alors assuré que tous les états de contraintes Σ intérieurs à P^{hom} sont réellement supportables par le milieu hétérogène. On écarte ainsi la plupart des composites à fibres *fragiles*, et on explique de cette façon les résultats décevants qu'a pu obtenir l'analyse limite dans ce type de lois de comportement pour lesquelles elle n'est pas adaptée.

METHODE DE CALCUL

La résolution numérique des problèmes d'analyse limite (10) ou (11) comporte trois difficultés :

a) les conditions aux limites intervenant dans (10) et (11) sont des conditions de périodicité.

b) le chargement s'effectue en moyenne : dans (10) on contrôle Σ moyenne des contraintes, alors que dans (11) on contrôle E qui est en général la moyenne des déformations, ou dans le cas de perforations, une intégrale de surface des déplacements.

c) il y a peu d'algorithmes permettant de résoudre directement les problèmes d'analyse limite : l'approche par champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles se prête mal à l'emploi d'éléments finis en déplacements, tandis que l'approche par champs cinématiquement admissibles fait intervenir la fonction π qui n'est pas différentiable en 0 et qui est seulement à croissance linéaire. Nous contournons cette difficulté en résolvant un problème d'évolution élastoplastique qui donne asymptotiquement le chargement limite cherché.

Nous considérons ici chacune de ces difficultés prise séparément. En pratique, lorsque les solutions retenues sont itératives, on couple les itérations associées à chaque difficulté pour accélérer la convergence.

1. Conditions de périodicité.

Un problème élastique avec conditions de périodicité s'écrit après discrétisation par éléments finis

$$(12)\quad V^TKU = V^TF \qquad \forall\, V \text{ tel que } PV = 0 \;\; ; \;\; PU = 0 \,.$$

$U = (U_1,U_2,U_3)$ est le vecteur des degrés de liberté de dimension N, U_2 et U_3 sont les M composantes de U liées par les M conditions de périodicité. P est la matrice (0,Id,-Id) de dimension M × N exprimant les conditions de périodicité. (12) est équivalent au problème de minimisation sous contrainte

$$(13)\quad \text{Inf}\ \frac{1}{2}\, V^TKV - V^TF \qquad \forall\, V : PV = 0$$

dont la résolution peut être effectuée par diverses méthodes parmi lesquelles nous retenons la pénalisation, l'élimination, l'utilisation d'un Lagrangien.

a) Pénalisation. Le problème (13) est remplacé par un problème de minimisation sans contrainte

$$\text{Inf}\ \frac{1}{2}\, V^TKV + \frac{10^k}{2}\, V^TP^TPV - V^TF \qquad \forall\, V \in \mathbb{R}^N$$

où le choix de l'exposant k nécessite quelques précautions. Les termes diagonaux de 10^kP^TP doivent être 10^5 à 10^6 fois ceux de K pour assurer correctement l'égalité PU = 0 sans provoquer toutefois un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité totale. Ceci sous entend que les termes diagonaux de K sont du même ordre de grandeur, ce qui s'avère faux lors d'un calcul élasto-plastique où la raideur des éléments plastifiés est très petite devant celle des éléments élastiques. La matrice est alors d'autant plus mal conditionnée qu'on s'approche de la charge limite, et la méthode est donc mal adaptée à notre objectif. Ajoutons que la pénalisation affecte fortement la largeur de bande de la matrice de rigidité qu'il est alors nécessaire de stocker en suivant sa ligne de ciel.

b) Elimination. Cette méthode consiste à éliminer les d.d.l. U_3 au profit des d.d.l. U_2 (U_2 et U_3 sont liés par les relations de périodicité). Le système à résoudre, qui s'écrit initialement

$$(V_1,V_2,V_3)\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = (V_1,V_2,V_3)\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \forall\, V, V_2 = V_3$$

et $U_2 = U_3$, est équivalent à

$$(14)\quad \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12}+K_{13} & 0 \\ K_{12}^T+K_{13}^T & K_{22}+K_{23}+K_{23}^T+K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2+F_3 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

En pratique on résoud le système (14) avec pour second membre $(F_1,F_2+F_3,0)$: on trouve les composantes U_1 et U_2 de la solution,

puis on affecte la valeur U_2 à U_3. Cette méthode ne pose pas de problème de conditionnement et c'est celle que nous avons utilisée lors des calculs élastoplastiques. Elle affecte cependant la largeur de bande du système et là encore un stockage ligne de ciel de la matrice de rigidité s'avère préférable.

c) Lagrangien. On introduit le Lagrangien associé au problème (13)

$$L(V,\mu) = \frac{1}{2}\, V^TKV - V^TF + V^TP^T\mu \,,$$

dont on cherche un point selle $(U,\lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ par un algorithme classique de type Uzawa : i) $\lambda^o \in \mathbb{R}^M$ arbitraire

λ^n étant connu, U^n puis λ^{n+1} sont calculés par

ii) $L(U^n,\lambda^n) \leq L(V,\lambda^n) \quad \forall\, V \in \mathbb{R}^N$

iii) $\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n\, PU^n \qquad \rho_n > 0$.

Ces deux dernières relations sont équivalentes à

$$(15)\quad KU^n = F - P^T\lambda^n \quad , \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n PU^n \,,$$

de sorte que chaque itération ne nécessite qu'une seule résolution avec matrice de rigidité K, qui n'est autre que la matrice de rigidité usuelle creuse. On évite ainsi les modifications des méthodes précédentes qui affectent la largeur de bande du système, avantage que l'on paie par la nécessité d'itérations. Le choix de ρ_n se fait en interprétant (15) après élimination de U^n, comme un algorithme de descente sur le problème dual de (13). On utilise alors l'algorithme de gradient conjugué qui permet la détermination explicite de ρ_n. La forme particulière de la matrice P apporte des simplifications notables dans l'algorithme c) dont on trouvera tous les détails dans DEBORDES & al[12]. Les essais numériques effectués[12] ont montré la supériorité de la méthode de Lagrangien lors de la résolution d'un problème élastique (facteur 50). Cependant pour un problème d'évolution le nombre des itérations est multiplié par le nombre de pas et donc augmente considérablement le coût de la méthode, par rapport aux deux premières méthodes où, une fois la matrice de rigidité factorisée, les résolutions à chaque pas sont peu coûteuses (à condition que le problème puisse être traité avec une matrice de rigidité constante).

2. Chargements en moyenne par contraintes ou déformations macroscopiques.

Un problème élastique avec contrainte ou déformation macroscopique donnée s'écrit

$$(16)\quad \begin{cases} \sigma = a\varepsilon(u) = a(E + \varepsilon(u^*)) \quad , \quad \text{div}_y\,\sigma = 0 \\ + \text{ conditions de périodicité (7)(8)}, \end{cases}$$

où E *ou* $\Sigma = \langle\sigma\rangle$ est donnée. Lorsque la déformation macroscopique est donnée elle apparaît comme l'opposée d'une déformation d'origine thermique connue, que la plupart des codes de calcul peuvent traiter comme telle. Si on utilise un code ne présentant pas cette possibilité, il est facile de se ramener à un chargement concentré, en écrivant (16) sous la forme

$$\begin{cases} \mathrm{div}_y(a\varepsilon(u^*)) = -\,\mathrm{div}_y(aE) \\ + \text{ conditions de périodicité} \end{cases}$$

E étant un tenseur constant, et a étant constant sur chaque constituant le terme $\mathrm{div}_y(aE)$ est une masse de Dirac (i.e. un chargement concentré) d'intensité $[\![a]\!]\,E\,n$ sur les interfaces entre hétérogénéités.

La prise en compte d'une contrainte macroscopique donnée est plus délicate car E devient une inconnue du problème. Il est possible de traiter le problème (16) avec la condition $\langle\sigma\rangle = \Sigma$ comme un problème *avec contrainte*, en utilisant pour cela des méthodes classiques (pénalisation, Lagrangien...). Nous préférons une approche dont le contenu mécanique est plus riche. Appliquons l'égalité (9) à σ et successivement à un champ $\tilde{u}$ périodique et à un champ $\tilde{u}$ affine ($\tilde{u}_i = \tilde{E}_{ij}y_j$). Alors :

$$(17)\quad \begin{aligned} &\langle a\varepsilon(u^*)\varepsilon(\tilde{u})\rangle + E\,\langle a\varepsilon(\tilde{u})\rangle = 0 && \forall\,\tilde{u} \text{ périodique} \\ &\langle a\varepsilon(u^*)\rangle\tilde{E} + \langle a\rangle\,E\,\tilde{E} = \Sigma\,\tilde{E} && \forall\,\tilde{E} \in \mathbb{R}^6 \end{aligned}$$

Après discrétisation par éléments finis ce système devient

$$(18)\quad \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^* \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Sigma \end{pmatrix}$$

où U^* désigne le vecteur des degrés de liberté (compte tenu des relations de périodicité), et où K_{11} K_{12} et K_{22} sont les matrices de rigidité associées aux formes bilinéaires

$(u^*,\tilde{u}) \to \langle a\varepsilon(u^*)\varepsilon(\tilde{u})\rangle$, $(\tilde{u},E) \to E\langle a\varepsilon(\tilde{u})\rangle$, $E,\tilde{E} \to \langle a\rangle\,E\,\tilde{E}$.

Nous voyons apparaître sur l'égalité (18) la vraie nature des degrés de liberté d'un champ de déplacements sur la cellule de base : ce sont d'une part des d.d.l. locaux U^* (périodiques), d'autre part des d.d.l. globaux E. On voit de plus sur (18) que les forces associées aux d.d.l. E sont les contraintes macroscopiques Σ. Le chargement en moyenne devient alors un chargement classique, et imposer une déformation ou une contrainte macroscopique sur (18) ne présente pas plus de difficultés que d'imposer un déplacement ou une force dans un problème classique.

En pratique la formation de la matrice de rigidité (18) se fait automatiquement en adjoignant à la structure discrétisée un noeud fictif supportant les 6 d.d.l. globaux E. Ce noeud est ajouté à la table de connectivité de chaque élément, de sorte que le vecteur U^e des d.d.l. de l'élément e est automatiquement remplacé par $\hat{U}^e = (U^e,E)$. On substitue aussi à la matrice B de la relation $[\varepsilon] = [B][U]$, la matrice $[\hat{B}] = ([B],\mathrm{Id})$ de sorte que la déformation généralisée s'écrit

$$[\hat{\varepsilon}^e] = [\hat{B}][\hat{U}^e] = [B][U^e] + [E] \quad .$$

Puis l'assemblage de $[\hat{\varepsilon}^e]^T\,[a]\,[\hat{\varepsilon}^e]$ permet la détermination de K_{11}, K_{12} et K_{22}.

De même le vecteur des forces généralisées est automatiquement remplacé par le vecteur

$$[\hat{f}^e] = \int_e [\hat{B}]^T[\sigma] = \left(\int_e [B]^T[\sigma]\ ,\ \int_e [\sigma]\right)$$

dont la deuxième composante est l'intégrale de σ sur l'élément. Après assemblage on retrouvera pour seconde composante l'intégrale de σ sur la cellule de base, ce qui est conforme à (18).

3. Problème d'analyse limite sur la cellule de base.

Comme cela a été dit en préambule, la résolution directe des problèmes d'analyse limite (10) ou (11) est délicate, et nous préférons résoudre un problème d'évolution pour un matériau modèle élastique parfaitement plastique possédant le même domaine de plasticité P(y) que le matériau hétérogène initial, obéissant à la règle de normalité, et dont les propriétés élastiques peuvent être choisies arbitrairement.

Problème d'évolution élasto-plastique.

Le matériau modèle a pour loi de comportement

$$(19)\quad \dot{\sigma}(y) = a(y)(\varepsilon(\dot{u}(y)) - \dot{\varepsilon}^p(y)),\ f(y,\sigma(y)) \leq 0,\ \dot{\varepsilon}^p(y) = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial\sigma}(y,\sigma(y))$$

où on a supposé qu'à P(y) pouvait être associée la fonction seuil $f(y,\sigma)$, et où le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ satisfait les conditions classiques de positivité.

L'évolution élastoplastique considérée se fait en respectant la forme générale des champs microscopiques

$$(20)\quad \begin{cases} \mathrm{div}_y\,\sigma = 0\ , & \sigma.n \text{ antipériodique} \\ u = E.y + u^*\ , & u^* \text{ périodique.} \end{cases}$$

De plus selon que l'on désire résoudre le problème (10) ou le problème (11) on impose la contrainte macroscopique ou la déformation macroscopique. On remarque qu'en vertu de la règle de normalité la solution (σ,u) de (19)(20) a la propriété variationnelle :

$$(21)\quad \langle A\dot{\sigma},\sigma^* - \sigma\rangle \geq \langle\varepsilon(\dot{u}),\sigma^* - \sigma\rangle = (\dot{E},\Sigma^* - \Sigma)$$

pour tout σ^* vérifiant $(20)_1$ et $\sigma^*(y) \in P(y)$ pour tout y.

Notons de plus que par définition du domaine de plasticité macroscopique, Σ et Σ^* figurant dans (21) sont éléments de P^{hom}.

Déformation macroscopique imposée.

Le système à résoudre est constitué des équations (19)(20) , et de

$$(22)\quad E(t) = t\,\dot{E}^\circ \qquad \text{où} \qquad \dot{E}^\circ \in \mathbb{R}^9_s \text{ est donnée.}$$

Lorsqu'on fait tendre t vers $+\infty$ deux cas peuvent se présenter :

a) $\sigma(t,y)$ atteint une valeur limite $\sigma_\infty(y)$ et $\dot{\sigma}$ tend donc vers 0. D'après (21) on a

$$(23)\quad (\dot{E}^\circ,\Sigma^* - \Sigma_\infty) \leq 0 \qquad \forall\,\Sigma^* \in P^{hom}\ ,\ \Sigma_\infty = \langle\sigma_\infty\rangle \in P^{hom}$$

(23) montre que $\pi^{hom}(\dot{E}^\circ) = (\dot{E}^\circ, \Sigma_\infty)$. De plus il est facile de voir que Σ_∞ est sur le bord de P^{hom} et que celui-ci admet $\dot{E}^\circ$ pour normale extérieure en ce point.

b) $\sigma(t,y)$ ne converge pas. Alors $\pi^{hom}(\dot{E}^\circ) = +\infty$. Il n'y a pas de mode de rupture de la cellule de base correspondant à une vitesse de déformation macroscopique $\dot{E}^\circ$.

Contrainte macroscopique imposée.

Le système à résoudre est constitué des équations (19)(20) et de

$$(24)\quad \Sigma(t) = \lambda(t)\Sigma^\circ \quad , \quad \Sigma^\circ E(t) = t$$

$(24)_1$ exprime que $\Sigma(t)$ est parallèle à Σ°, tandis que $(24)_2$ fixe de façon implicite son module. Ce chargement est préférable au chargement $\Sigma(t) = t\Sigma^\circ$ car il permet un meilleur contrôle du chargement au voisinage de la charge limite. Lorsque t tend vers $+\infty$ deux cas peuvent se présenter :

a) $\lambda(t)$ a une limite λ_∞. $\dot{E}(t)$ a alors une limite $\dot{E}_\infty$ et $\dot{\sigma}(t)$ tend vers 0. On voit sur (21) que de plus

$$(25)\quad (\dot{E}_\infty, \Sigma^* - \Sigma_\infty) \leq 0 \quad \forall\, \Sigma^* \in P^{hom}, \ \Sigma_\infty = \lambda_\infty \Sigma^\circ \in P^{hom}.$$

(25) montre que Σ_∞ appartient au bord de P^{hom} qui admet $\dot{E}_\infty$ comme normale extérieure en ce point.

b) $\lambda(t)$ n'a pas de limite . Le domaine P^{hom} est alors non borné dans la direction Σ°.

4. Implémentation numérique.

La résolution numérique des problèmes élastoplastiques ci-dessus se fait par un schéma implicite en temps, ce qui évite les dépassements du critère de plasticité. Pour fixer les idées nous décrivons la procédure associée au problème à déformation macroscopique imposée. A chaque pas de temps l'état (u,σ) étant connu le problème en accroissements que nous devons résoudre s'écrit

$$(26)\quad \begin{cases} \varepsilon(\Delta u) - A\Delta\sigma = \Delta\ell \dfrac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma + \Delta\sigma) & (A = a^{-1}) \\ \mathrm{div}_y(\Delta\sigma) = 0 \ , \quad \varepsilon(\Delta u) = \Delta E + \varepsilon(\Delta u^*), \text{ conditions de périodicité} \end{cases}$$

où $\Delta\ell$ vérifie ($\Delta\sigma^{el}$ désigne l'incrément élastique de contraintes):

- si $f(\sigma+\Delta\sigma^{el}) < 0$ alors $\Delta\ell = 0$ (régime élastique) ,
- sinon $f(\sigma+\Delta\sigma) = 0$.

Soient K et S°_{per} l'ensemble des incréments de contraintes respectivement plastiquement et statiquement admissibles :

$$K = \{\tau \mid f(\sigma+\tau) \leq 0\}, \ S^\circ_{per} = \{\tau \mid \mathrm{div}_y \tau = 0, \ \tau.n \text{ antipériodique}\}$$

La solution $\Delta\sigma$ de (26) a la propriété variationnelle suivante

$$(27)\quad \min_{\tau \in K \cap S^\circ_{per}} \frac{1}{2} \langle A\tau\tau\rangle - \Delta E\langle\tau\rangle .$$

Le problème dual de (27) s'écrit

$$(28)\quad \min_{\substack{\Delta u = \Delta E.y + \Delta u^* \\ \Delta u^* \text{ périodique}}} \langle j(\varepsilon(\Delta u))\rangle \quad , \text{ où}$$

$$j(e) = \sup_{\tau \in K} (\tau, e) - \frac{1}{2} A\tau\tau$$

On introduit le Lagrangien augmenté associé à (27) et (28) (cf.[13])

$$L_r(v,e,\tau) = \langle j(e)\rangle + \langle \tau(\varepsilon(v)-e)\rangle + \frac{r}{2}\langle a(e-\varepsilon(v))(e-\varepsilon(v))\rangle$$

dont on cherche un point selle $(\Delta u, \varepsilon(\Delta u), \Delta\sigma)$:

$$L_r(\Delta u, \varepsilon(\Delta u), \varepsilon) \leq L_r(v,e,\tau) \leq L_r(v,e,\Delta\sigma)$$

e et τ quelconques, $v = \Delta E.y + v^*$, v^* périodique.

La recherche du point selle est effectuée par un algorithme d'Uzawa :

$\Delta u^n, \Delta e^n, \Delta\sigma^n$ étant connus

$$\Delta u^{n+1} = \underset{v=\Delta E\, y + v^*}{\mathrm{Arg\,min}} \ L_r(v, \Delta e^n, \Delta\sigma^n)$$

$$\Delta e^{n+1} = \underset{e}{\mathrm{Arg\,min}} \ L_r(\Delta u^{n+1}, e, \Delta\sigma^n)$$

$$\Delta\sigma^{n+1} = \Delta\sigma^n + \rho(a\varepsilon(\Delta u^{n+1}) - a\,\Delta e^{n+1})$$

En pratique l'algorithme s'écrit

i) Δu^{*n+1}, champ périodique, est solution du problème élastique

$$r\langle a\varepsilon(u^{*n+1})\varepsilon(v^*)\rangle = -r\langle a\Delta E\varepsilon(v^*)\rangle + \langle(ra\Delta e^n - \Delta\sigma^n)\varepsilon(v^*)\rangle$$

pour tout v^* périodique. On pose $\Delta u^{n+1} = \Delta E.y + \Delta u^{*n+1}$.

ii) $\Delta\tau^{n+1}$ est défini par

$$\varepsilon(\Delta u^{n+1}) + \frac{1}{r} A\Delta\sigma^n - \frac{1+r}{r} A\Delta\tau^{n+1} = \Delta\ell \frac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma + \Delta\tau^{n+1})$$

- si $f(\sigma + \frac{r}{1+r} a\varepsilon(\Delta u^{n+1}) + \frac{r}{1+r}\Delta\sigma^n) < 0$ alors $\Delta\ell = 0$
- sinon $f(\sigma + \Delta\tau^{n+1}) = 0$

iii) $\Delta e^{n+1} = \frac{1}{r} A(\Delta\sigma^n - \Delta\tau^{n+1}) + \varepsilon(\Delta u^{n+1})$

iv) $\Delta\sigma^{n+1} = \Delta\sigma^n + \rho a(\varepsilon(\Delta u^{n+1}) - \Delta e^{n+1})$.

Cet algorithme de Lagrangien augmenté nécessite le stockage d'une quantité intermédiaire (Δe^{n+1}) que la méthode de Newton Raphson n'utilise pas, mais s'est avéré deux fois plus rapide lorsqu'on choisit $r = \rho = \frac{1}{2}$.

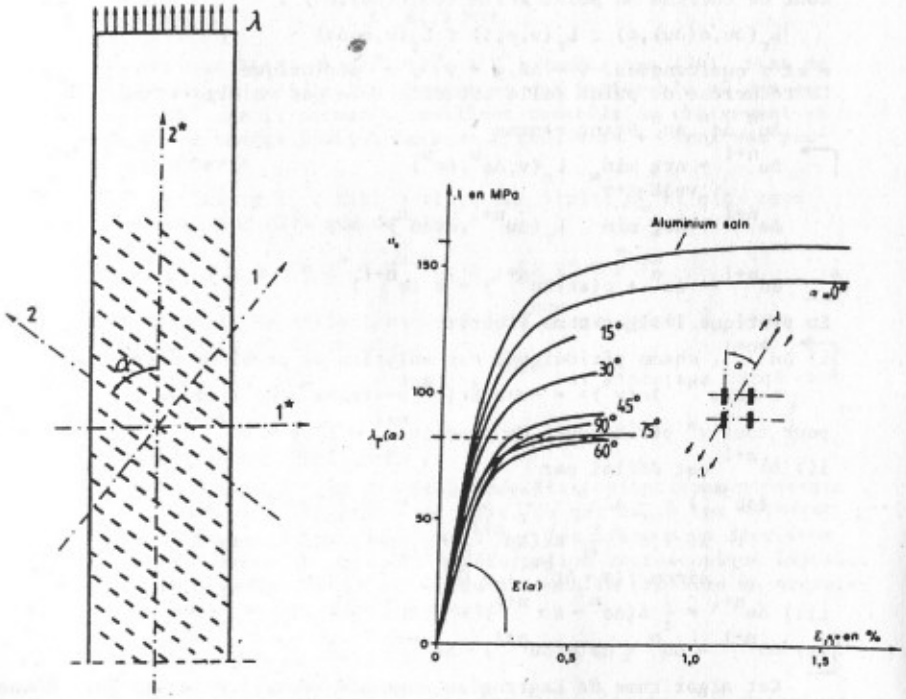
COMPARAISON EXPERIENCES / CALCULS

Les calculs ont été effectués sur des plaques perforées sollicitées en contraintes planes, et sous des chargements uniaxiaux tout d'abord, puis biaxiaux.

1. Chargements uniaxiaux.

La méthode proposée est testée par comparaison avec une série d'expériences, menée par LITEWKA & al[14], sur des éprouvettes découpées dans une tôle d'aluminium, dans laquelle ont été préalablement usinées des cavités fortement orientées et réparties de manière

périodique. Des essais de traction simple jusqu'à rupture effectués pour différentes valeurs de l'inclinaison α entre la direction de traction et la direction de perforation mettent en évidence l'anisotropie élastique et plastique de la tôle perforée. Nous allons voir que la théorie présentée ci-dessus permet de retrouver par un calcul sur une cellule de base, les valeurs des charges de rupture ainsi que l'allure des modes de rupture relevés par LITEWKA & al[14].



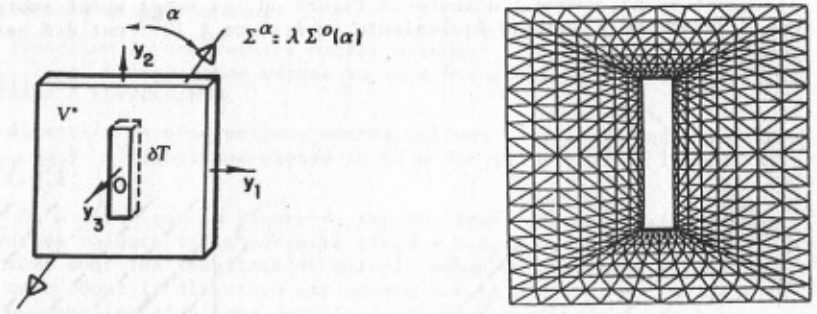
a. Essai de traction sur plaques perforées[14]

b. Courbes contraintes déformation en fonction de l'inclinaison α .

- Figure 1 -

Dans l'expérience considérée, le tenseur de contraintes macroscopiques Σ imposé lors d'une traction selon une direction d'inclinaison α s'exprime dans les axes (1.2) liés à la cellule de base par

$$\Sigma = \lambda \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\Sigma^{\circ}(\alpha)$$

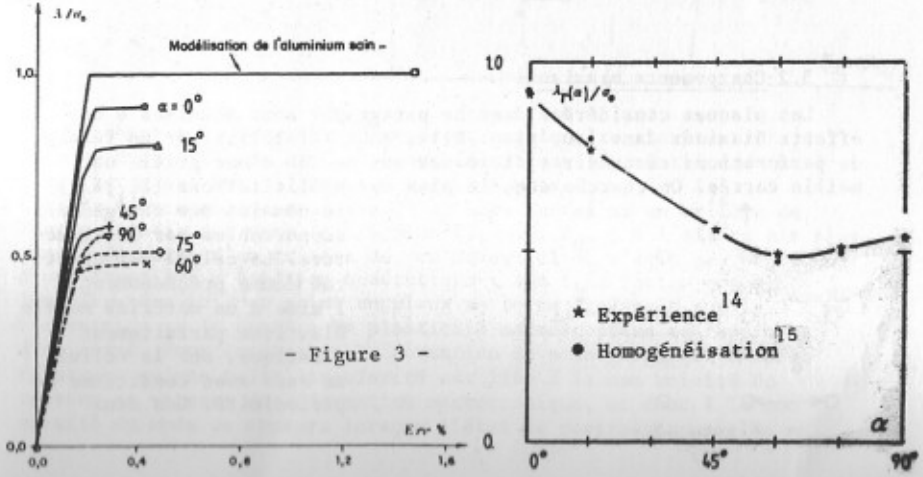


- Figure 2 -

La résolution du problème élastoplastique, à direction de contrainte macroscopique donnée, est effectuée sur la cellule de base maillée par éléments finis P1. Les caractéristiques de l'aluminium sain sont déterminées à partir des données expérimentales (Figure 1)

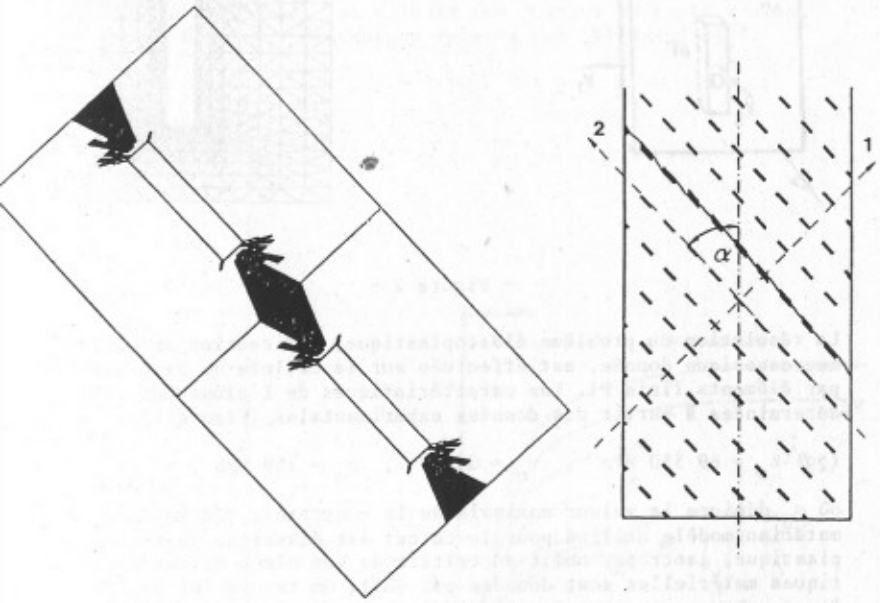
(29) $E_o = 69\ 550$ MPa , $\nu_o = 0.337$, $\sigma_o = 159$ MPa ,

où σ_o désigne la valeur maximale de la contrainte équivalente. Le matériau modèle utilisé pour le calcul est élastique parfaitement plastique, isotrope, obéit au critère de Von Mises et ses caractéristiques matérielles sont données par (29). On trouve sur la figure 3 les courbes contrainte longitudinale / allongement longitudinal calculées pour le matériau modèle par résolution du problème (19)(20)(24) sur la cellule de base, avec conditions de périodicité. Les valeurs des contraintes maximales déduites de cette figure sont en bon accord avec les valeurs observées expérimentalement. On constate une forte sensibilité des contraintes de rupture à l'inclinaison des perforations, avec un minimum de résistance aux environs de α = 60°.



- Figure 3 -

La comparaison entre modes de rupture observés et calculés est également bonne, comme l'atteste la figure où les zones ayant subi une déformation plastique équivalente supérieure à 10^{-3} ont été hachurées.

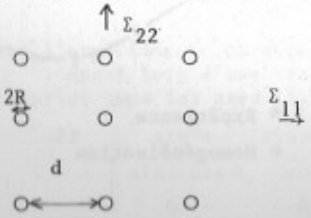


calcul $\alpha = 45°$ Expérience

- Figure 4 -

3.2 Chargements biaxiaux.

Les plaques considérées dans ce paragraphe sont soumises à des efforts biaxiaux dans leur plan. Elles sont affaiblies par un réseau de perforations circulaires disposées aux noeuds d'une grille de maille carrée. On cherche dans le plan des sollicitations $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ le domaine des chargements supportables par la structure. Le calcul est effectué comme précédemment à l'aide d'un matériau modèle élastique parfaitement plastique, sur la cellule de base avec conditions de périodicité. Les deux



- Figure 5 -

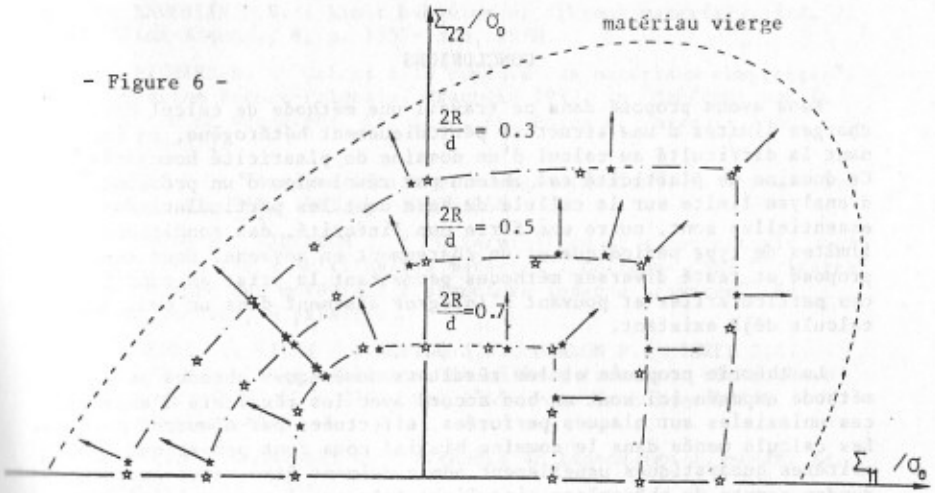
stratégies de calcul exposées au §2 ont été testées, sur des codes différents et indépendants :

a) direction de contraintes macroscopiques $\Sigma°$ imposée dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$. L'algorithme exposé au §2 a été implanté dans le code ALIBABA à EDF/DER/MMN.

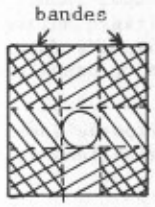
b) direction de déformations macroscopiques $\dot{E}°$ imposée dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$. L'algorithme exposé au §2 a été implanté dans le code MEF[16] au L.M.A.

On a porté sur la Figure 6 les résultats des deux calculs pour diverses valeurs de la porosité (2R/d = 0.3, 0.5, 0.7). Les étoiles pleines sont les résultats de calculs selon un trajet de déformation imposée (dont la direction est donnée par la flèche), et les étoiles vides sont les résultats de calcul selon un trajet de contrainte imposée. La concordance entre les deux calculs est bonne ce qui montre que les deux stratégies sont numériquement équivalentes, et que le choix de l'une ou de l'autre se fera plutôt selon les commodités d'implantation ou les caractéristiques du problème à traiter.

- Figure 6 -



On observe la formation d'un point anguleux sur la frontière du domaine de plasticité macroscopique, alors que la frontière du matériau vierge est une ellipse. Dans le 1/4 plan $\Sigma_{11} \geq 0$, $\Sigma_{22} \geq 0$ le critère macroscopique rappelle d'ailleurs fortement un critère de Tresca, tandis que dans le 1/4 plan $\Sigma_{11} \leq 0$, $\Sigma_{22} \geq 0$ l'allure est plus proche de celle d'un critère de Von Mises. Il ne s'agit pas cependant d'une frontière d'équation quadratique : aux très fortes porosités (non figurées ici) un point anguleux se forme également sur la 2ème bissectrice et le domaine de plasticité macroscopique se rapproche d'un carré. Pour comprendre la formation du point anguleux on peut remarquer qu'une telle singularité est liée à la non unicité du tenseur de vitesse de déformation macroscopique, et donc à la non unicité du mode de rupture lorsque l'état de contraintes est en ce



- Figure 7 -

point singulier. Cette non unicité est facilement concevable : lorsque la porosité devient suffisante le comportement de la cellule de base se rapproche de celui d'un réseau de bandes horizontales et verticales (cf. figure 7). La ruine survient alors par rupture d'un ligament séparant deux perforations : rupture d'un ligament horizontal lorsque $\Sigma_{11} > \Sigma_{22} \geq 0$, ou vertical lorsque $\Sigma_{22} > \Sigma_{11} \geq 0$. Ainsi lorsque $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ la ruine peut survenir par rupture de l'un ou de l'autre de ces ligaments ou par combinaison de ces modes de rupture.

Il se dégage donc nettement qu'une approximation du critère macroscopique de plasticité par une fonction quadratique est injustifiée. Plus que l'erreur sur la résistance prévue, c'est une erreur sur la stabilité plastique, très liée à la régularité de la surface seuil qui est à craindre. De ce point de vue il nous semble que les critères de type Tsai Wu, ou Gurson original[17], ou modifié[18] doivent être revisités en gardant à l'esprit la possibilité de points anguleux.

CONCLUSIONS

Nous avons proposé dans ce travail une méthode de calcul des charges limites d'une structure périodiquement hétérogène, en ramenant la difficulté au calcul d'un domaine de plasticité homogénéisé. Ce domaine de plasticité est obtenu par résolution d'un problème d'analyse limite sur la cellule de base dont les particularités essentielles sont, outre une forte non linéarité, des conditions aux limites de type périodique et un chargement en moyenne. Nous avons proposé et testé diverses méthodes permettant la prise en compte de ces particularités et pouvant s'intégrer aisément dans un code de calculs déjà existant.

La théorie proposée et les résultats numériques obtenus par la méthode exposée ici sont en bon accord avec les résultats d'expériences uniaxiales sur plaques perforées, effectuées par d'autres auteurs. Les calculs menés dans le domaine biaxial nous font penser que les critères quadratiques usuellement admis doivent être revus pour rendre compte de phénomènes singuliers tels que la non unicité des modes de rupture.

REFERENCES

1. SALENCON J. : *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses ENPC, Paris, 1983.
2. HASHIN Z. : "Analysis of composite materials : a survey". J. Appl. Mech., 50, 1983, p. 481-505.
3. SANCHEZ PALENCIA E. : *Non homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics N° 127. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
4. SUQUET P. : "Plasticité et homogénéisation". Thèse, Paris 6, 1982.
5. SUQUET P. : "Elements of homogenization for inelastic Solid Mechanics". Notes du cours CISM "Homogenization Techniques for Composite Media". Udine 1985. A paraître.
6. MARIGO J.J., MIALON P., MICHEL J.C., SUQUET P. : Plasticité et homogénéisation : un exemple de calcul des charges limites d'une structure hétérogène. A paraître au J. Méca. Th. Appl.
7. SHU L.S., ROSEN, B.W. : Strength of fiber reinforced composites by limit analysis method., *J. Composite Mat.*, 1, p. 366-381, 1967.
8. Mc LAUGHLIN P.V. : Limit behavior of fibrous materials, *Int. J. Solids Struct.*, 6, p. 1357-1376, 1970.
9. LE NIZHERY D. : "Calcul à la rupture des matériaux composites". Symposium Franco-Polonais. Cracovie 1977, in *Problèmes non linéaires de Mécanique*. Ed. Acad. Sc. Pologne, Varsovie 1980, p. 359-370.
10. SUQUET P. : "Analyse limite et homogénéisation". C.R. Acad. Sc. Paris, II, 296, 1983, p. 1355-1358.
11. DE BUHAN P., SALENCON J. : "Determination of a macroscopic yield criterion for a multilayered material". Colloque CNRS "Critères de rupture des matériaux à structure interne orientée", Ed. J.P. Boehler, à paraître.
12. DEBORDES O., LICHT C., MARIGO J.J., MIALON P., MICHEL J.C., SUQUET P. : "Charges limites de milieux fortement hétérogènes" Rapport MIR N° 83 S 0780. Mai 1985. Note Technique LMGMC, Montpellier 85-3.
13. FORTIN M., GLOWINSKI R. : *Méthodes de Lagrangien augmenté*. Ed. Dunod, Paris 1982.
14. LITEWKA A., SAWCZUK A., STANISLAWSKA J. : "Simulation of oriented continuous damage evolution". J. Méca. Th. Appl., 3, p. 675-688, 1984.
15. MICHEL J.C. : Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités. Thèse, Paris 6, 1984.
16. DHATT G., TOUZOT G. : "*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Maloine S.A. Ed., Paris, 1981.
17. GURSON A.L. : "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media". J. Eng. Mat. Tech., 99, 1977, p. 1-15.
18. TVERGAARD V. : "On localization in ductile materials containing spherical voids". Int. J. Fracture, 18, 1982, p. 237-252.