Compléments de logique

Proposition *(Réciproque et contraposée)*
Pour toutes expressions mathématiques P_x et Q_x portant sur les éléments x d'un ensemble E on a

- *La réciproque de l'assertion « $\forall x \in E, P_x \Rightarrow Q_x$ » est « $\forall x \in E, Q_x \Rightarrow P_x$ ».*
- *La contraposée de l'assertion « $\forall x \in E, P_x \Rightarrow Q_x$ » est « $\forall x \in E, non(Q_x) \Rightarrow non(P_x)$ ».*

Exemples

1. *La réciproque de* « $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{e^x = 1}_{=P_x} \Rightarrow \underbrace{x = 0}_{=Q_x}$ » *est* « $\forall x \in \mathbb{R}, x = 0 \Rightarrow e^x = 1$ ».
2. *La contraposée de* « $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ » *est* « $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x \neq 0}_{=non(Q_x)} \Rightarrow \underbrace{e^x \neq 1}_{=non(P_x)}$ ».

Proposition *(Négation d'assertion)*
Pour toutes expressions mathématiques P_x et Q_x portant sur les éléments x d'un ensemble E on a

- $non(\forall x \in E,\ P_x) \Leftrightarrow \exists x \in E : non(P_x)$.
- $non(\forall x \in E,\ P_x \text{ et } Q_x) \Leftrightarrow \exists x \in E : non(P_x) \text{ ou } non(Q_x)$.
- $non(\forall x \in E,\ P_x \text{ ou } Q_x) \Leftrightarrow \exists x \in E : non(P_x) \text{ et } non(Q_x)$.
- $non(\forall x \in E,\ P_x \Rightarrow Q_x) \Leftrightarrow \exists x \in E : P_x \text{ et } non(Q_x)$.
- $non(\exists x \in E :\ P_x) \Leftrightarrow \forall x \in E, non(P_x)$.
- $non(\exists x \in E :\ P_x \text{ et } Q_x) \Leftrightarrow \forall x \in E, non(P_x) \text{ ou } non(Q_x)$.
- $non(\exists x \in E :\ P_x \text{ ou } Q_x) \Leftrightarrow \forall x \in E, non(P_x) \text{ et } non(Q_x)$.

Exemples

1. *La négation de* « $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\cos(x) \leqslant 1}_{=P_x}$ » *est* « $\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{\cos(x) > 1}_{=non(P_x)}$. »
2. *La négation de* « $\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{\cos(x) \leqslant 1}_{=P_x}$ *et* $\underbrace{\cos(x) > 0}_{=Q_x}$ » *est* « $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\cos(x) > 1}_{=non(P_x)}$ *ou* $\underbrace{\cos(x) \leqslant 0}_{=non(Q_x)}$. »
3. *La négation de* « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \underbrace{x < y}_{=P_x}$ *ou* $\underbrace{e^x \geqslant e^y}_{=Q_x}$ » *est* « $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, \underbrace{x \geqslant y}_{=non(P_x)}$ *et* $\underbrace{e^x < e^y}_{=non(Q_x)}$ »
4. *La négation de* « $\forall x, y \in \mathbb{R}, \underbrace{e^x = e^y}_{=P_x} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{=Q_x}$ » *est* « $\exists x, y \in \mathbb{R} : \underbrace{e^x = e^y}_{=P_x}$ *et* $\underbrace{x \neq y}_{=non(Q_x)}$ »

Remarque : on notera que « $\forall x, y \in \mathbb{R}$ » est un raccourci d'écriture pour dire « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ » que l'on utilisera fréquemment. De même, « $\exists x, y \in \mathbb{R}$ » signifie « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ ».