Correction du DS1 - vendredi 14 octobre 2016

Exercice 1.

1. (a) $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
   (b) $\exists y \in B : \forall x \in A : f(x) \neq y$.
2. $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ et $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f : A \to C$ est injective c'est à dire :
$$\forall x, y \in A,\ (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y.$$
Pour tout $x, y \in A$, on a
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad &\Rightarrow \quad g(f(x)) = g(f(y))\\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(y) \text{ car } g \text{ est injective}\\ &\Rightarrow \quad x = y \text{ car } f \text{ est injective.}\end{aligned}$$
On peut donc conclure que $g \circ f$ est injective.
4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln(\ln(x))}$ est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$x > 0,\ \ln(x) > 0 \text{ et } \ln(\ln(x)) \geqslant 0.$$
Or $\forall x > 0, \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^0 = 1$ et $\ln(\ln(x)) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{\ln(\ln(x))} \geqslant e^0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant e^1 = e$. Finalement,
$$\mathcal{D}_f =]0, +\infty[\cap]1, +\infty[\cap [e, +\infty[= [e, +\infty[.$$
La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(\sin(x))}$ est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\sin(x) \in \mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } \tan(\sin(x)) \neq 0.$$
Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \in [-1,1] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$. De plus
$$\tan(\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \sin(x) = 0 + k\pi \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi.$$
Finalement, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 2.

1. On considère l'inéquation $|3x+6| + |x-2| \leqslant 8 \quad (*)$.
On a
$$|3x+6| = \begin{cases} -3x-6 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 3x+6 & \text{si} \quad x \geqslant -2. \end{cases} \qquad \text{et } |x-2| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$
1er cas : si $x \in]-\infty, -2]$
$$(*) \Leftrightarrow -3x - 6 + 2 - x \leqslant 8 \Leftrightarrow -4x \leqslant 12 \Leftrightarrow x \geqslant -3.$$
Donc $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -2] \cap [-3, +\infty[= [-3, -2]$.

2ème cas : si $x \in [-2, 2]$
$$(*) \Leftrightarrow 3x + 6 + 2 - x \leqslant 8 \Leftrightarrow 2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0.$$
Donc $\mathcal{S}_2 = [-2, 2] \cap]-\infty, 0] = [-2, 0]$.

3ème cas : si $x \in [2, +\infty[$
$$(*) \Leftrightarrow 3x + 6 + x - 2 \leqslant 8 \Leftrightarrow 4x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$
Donc $\mathcal{S}_3 = [2, +\infty[\cap]-\infty, 1] = \varnothing$.

Conclusion : L'ensemble des solutions à l'inéquation $(*)$ est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = [-3, 0]$.

2. L'équation $\sqrt{4x+3} = x-2$ a un sens lorsque $4x+3 \geqslant 0$ et ne peut avoir de solutions que si $x-2 \geqslant 0$ c'est à dire pour $x \in [-\frac{3}{4}, +\infty[\cap [2, +\infty[= [2, +\infty[$. Pour tout x dans $[2, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+3} = x-2 &\Leftrightarrow (\sqrt{4x+3})^2 = (x-2)^2 \text{ (car les quantités sont de même signe)} \\ &\Leftrightarrow 4x+3 = x^2-4x+4 \\ &\Leftrightarrow x^2-8x+1 = 0. \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = 64-4 = 60 > 0$ on a deux racines réelles possibles qui sont

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{60}}{2} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15} \text{ et } x_2 = \frac{8+\sqrt{60}}{2} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}.$$

On a $x_1 \notin [2, +\infty[$ car $x_1 \geqslant 2 \Leftrightarrow 4-\sqrt{15} \geqslant 2 \Leftrightarrow 2 \geqslant \sqrt{15} \Leftrightarrow 2^2 \geqslant 15$ ce qui est faux, et $x_2 \in [2, +\infty[$ car $x_2 \geqslant 4$ donc l'unique solution à l'équation $\sqrt{4x+3} = x-2$ est $x_2 = 4+\sqrt{15}$.
Conclusion : $\mathcal{S} = \{4+\sqrt{15}\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(4x - \frac{5\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) &\Leftrightarrow 4x - \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 4x - \frac{5\pi}{2} = -(\frac{\pi}{2} - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 6x = \frac{6\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{4\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{6\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = (k+1)\pi. \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(k+1)\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 3.

1. $h^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(2x-1) = 0\} = \{0, \frac{1}{2}\}$.
2. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) > -3$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$h(x) > -3 \Leftrightarrow 2x^2 - x > -3 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 > 0.$$

On étudie le signe du polynôme $P : x \mapsto 2x^2 - x + 3$ sur $\mathbb{R}$. On a $\Delta = 1 - 4 \times 6 = -23 < 0$ donc P est de signe constant donné par le signe de $a = 2 > 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0$ ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) > -3$.
3. D'après la question 1., $y = 0$ admet deux antécédents par la fonction h (qui sont 0 et $\frac{1}{2}$), elle n'est donc pas injective. D'après la question 2., $y = -3$ n'admet pas d'antécédent par la fonction h, elle n'est donc pas surjective.
4. La fonction n'est pas injective et surjective, elle n'est donc pas bijective et n'admet alors pas d'application réciproque.

Exercice 4.

1. f est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ vérifiant $1 + x^2 \neq 0$. Or pour tout x dans $\mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on a

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x(\frac{x^2+1}{x^2})} = \frac{2}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{2x}{1+x^2} = f(x).$$

3. Montrons que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. On peut pour cela par exemple dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

Les valeurs pour lesquelles $f'(x)$ change de signe sont donc $x = -1$ et $x = 1$. De plus,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Par lecture du tableau, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4. D'après la question 2., on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(\frac{1}{x}) = f(x)$, en particulier $f(\frac{1}{2}) = f(2)$ et $\frac{1}{2} \neq 2$ donc f n'est pas injective. D'après la question 3., on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, ainsi $y = -2 < -1$ n'admet pas d'antécédent par f, elle n'est donc pas surjective.
5. D'après le tableau des variations de la fonction f, celle-ci est strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$, elle est donc injective sur $[-1, 1]$. La fonction g étant la restriction à l'intervalle $[-1, 1]$ de l'application f, on en déduit qu'elle est injective. Toujours d'après le tableau, on a $g([-1, 1]) = f([-1, 1]) = [-1, 1] = \mathcal{I}mg$, l'application g est donc à valeurs dans son image, elle est alors surjective. L'application g étant injective et surjective, elle est donc bijective et admet une application réciproque que nous allons déterminer : soient $x, y \in [-1, 1]$, résolvons l'équation $y = g(x)$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow y(1+x^2) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \ (*).$$

On calcule le discriminant de cette équation d'inconnue x : $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2) \geqslant 0$ car $y \in [-1, 1]$.
— Si $y = 0$, l'équation $(*)$ s'écrit $-2x = 0$ et admet pour unique solution $x = 0$.
— Si $y \neq 0$, l'équation $(*)$ admet pour solutions

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

L'application étant bijective, on sait qu'uniquement une de ces deux solutions est dans $[-1, 1]$ pour tout y dans $[-1, 1]$. Pour $y = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$, on remarque que la solution x_2 vaut $\dfrac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3} > 1$ donc $x_2 \notin [-1, 1]$ et ne convient pas, par élimination c'est donc x_1 qui convient.

Conclusion : L'application réciproque de g est donnée par

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : [-1, 1] & \to & [-1, 1] \\ y & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si} \quad y \neq 0. \end{cases} \end{array}$$