# Corrigé de l'examen du 26/06/2017
# Seconde session

**Exercice 1.**

1. a) Supposons $u_0 \geqslant 2$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $u_n \geqslant 2$.
**Initialisation :** Par hypothèse, on a $u_0 \geqslant 2$, la propriété est donc vraie au rang $0$.
**Hérédité :** Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 2$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 2$. On a
$$u_n \geqslant 2 \Rightarrow \sqrt{2+u_n} \geqslant \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 2,$$
ce qui achève la récurrence.

   b) Supposons $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
**Initialisation :** Par hypothèse, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, la propriété est donc vraie au rang $0$.
**Hérédité :** Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. On a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2,$$
ce qui achève la récurrence.

2. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{2+u_n} - u_n)(\sqrt{2+u_n} + u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$
et
$$-(u_n - 2)(u_n + 1) = -(u_n^2 + u_n - 2u_n - 2) = 2 + u_n - u_n^2,$$
d'où
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n}.$$

3. Tout d'abord, comme $u_0 \geqslant 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{2+u_n} + u_n \geqslant 0.$$
Si $u_0 \geqslant 2$, d'après $1.a)$ on a $u_n \geqslant 2$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et donc
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \leqslant 0, \text{ ce qui prouve que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$
Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, d'après $1.b)$ on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et donc
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \geqslant 0, \text{ ce qui prouve que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

4. Si $u_0 \geqslant 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante et minorée par $2$, par théorème elle est donc convergente et sa limite $\ell$ vérifie $\ell \geqslant 2$. Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et majorée par $2$, par théorème elle est donc convergente et sa limite $\ell$ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 2$.
Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ vérifiant $\ell \geqslant 0$.

5. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^+, |x - \ell| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \epsilon.$

6. Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}^+$, on a
$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
Pour $x, \ell \in \mathbb{R}^+$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f$ (continue et dérivable) entre $x$ et $\ell$ on obtient
$$|f(x) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - \ell| \leqslant |x - \ell| \text{ car } \frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant 1.$$
Montrons que la fonction $f$ est continue en $\ell$ : fixons $\epsilon > 0$. On a d'après l'inégalité précédente
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |x - \ell| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \epsilon,$$
ce qui prouve que
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^+, |x - \ell| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \epsilon,$$
$f$ est donc continue en $\ell$.

7. On peut en déduire que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.
8. D'après 4), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Par théorème, sa sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$. D'après 7), par continuité de la fonction $f$ en $\ell$ et convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell$, on a

$$f(u_n) = \sqrt{2+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell) = \sqrt{2+\ell}.$$

Par définition, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{2+\ell}$.
Par unicité de la limite on en déduit que $\ell$ vérifie l'équation $\ell = \sqrt{2+\ell}$. On a

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \Rightarrow \ell^2 = 2+\ell \Leftrightarrow (\ell+1)(\ell-2) = 0 \Leftrightarrow \ell = 2 \text{ ou } \ell = -1.$$

La limite $\ell$ étant positive ou nulle, on en déduit par élimination que $\ell = 2$.

**Exercice 2.**

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$, et on sait alors par théorème que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\ell$. D'après l'énoncé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls ce qui s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0.$$

Par théorème, on sait que cette inégalité est conservée par passage à la limite, ce qui donne $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
De plus, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = 2+u_n \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}\times u_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}(2+u_n) \\
&\Rightarrow \big(\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}\big) \times \big(\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}\big) = 2 + \lim_{n\to+\infty} u_n \\
&\Rightarrow \ell \times \ell = 2+\ell \\
&\Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \\
&\Rightarrow (\ell+1)(\ell-2) = 0. \\
&\Rightarrow \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.
\end{aligned}$$

La limite $\ell$ étant positive ou nulle, on en déduit par élimination que $\ell = 2$.

2. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{2+u_n} - 2 = \frac{(\sqrt{2+u_n}-2)(\sqrt{2+u_n}+2)}{\sqrt{2+u_n}+2} = \frac{2+u_n-4}{\sqrt{2+u_n}+2} = \frac{u_n-2}{\sqrt{2+u_n}+2}.$$

De plus, toujours pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a

$$u_n \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{2+u_n}+2 \geqslant \sqrt{2}+2 \geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{2+u_n}+2|} = \frac{1}{\sqrt{2+u_n}+2} \leqslant \frac{1}{2}$$

et donc

$$|u_{n+1}-2| = \frac{|u_n-2|}{|\sqrt{2+u_n}+2|} = |u_n-2| \times \frac{1}{|\sqrt{2+u_n}+2|} \leqslant \frac{1}{2}|u_n-2|.$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $2^n \geqslant n+1$.
**Initialisation :** $2^0 = 1 \geqslant 0+1$, la propriété est donc vraie au rang $0$.
**Hérédité :** Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2^n \geqslant n+1$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1 = n+2$. On a

$$2^{n+1} = 2\times 2^n \geqslant 2\times(n+1) = 2n+2 = n+2+n \geqslant n+2,$$

ce qui achève la récurrence.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_0-2|}{2^n}$.
**Initialisation :** $|u_0-2| \leqslant \frac{|u_0-2|}{2^0} = |u_0-2|$, la propriété est donc vraie au rang $0$.

**Hérédité :** Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_0-2|}{2^n}$ et montrons que $|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{|u_0-2|}{2^{n+1}}$. En utilisant la question 2), on a

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{|u_0 - 2|}{2^n} = \frac{|u_0 - 2|}{2^{n+1}},$$

ce qui achève la récurrence.

Enfin, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, comme $2^n \geqslant n + 1 > 0$ on a $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{2^n} \leqslant \frac{|u_0 - 2|}{n+1}.$$

4. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$

5. Fixons $\epsilon > 0$ et montrons qu'il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow |u_n - 2| < \epsilon.$$

D'après 3) on sait que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{|u_0 - 2|}{n+1}$, on peut donc chercher $N_\epsilon$ de sorte que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$ on ait $\dfrac{|u_0 - 2|}{n+1} < \epsilon$. On a

$$\frac{|u_0 - 2|}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|u_0 - 2|}{\epsilon} < n + 1 \Leftrightarrow \frac{|u_0 - 2|}{\epsilon} - 1 < n,$$

en posant $N_\epsilon = E\left(\left|\frac{|u_0-2|}{\epsilon} - 1\right|\right) + 1 \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow \frac{|u_0 - 2|}{n+1} < \epsilon \Rightarrow |u_n - 2| < \epsilon$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers 2.

**Exercice 3.** On a en utilisant les égalités $f' = f$ et $g' = g$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{fg - gf}{g^2} = 0.$$

Par théorème, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est alors constante, ce qui se traduit par :

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = c,$$

avec $c$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car $f$ et $g$ sont à valeurs strictement positives. En particulier, on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1) = c$ et comme $f(1) = g(1) = 1$ on en déduit que $c = 1$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) \Rightarrow f = g.$$

**Exercice 4.** Les fonctions sinus et tangente étant de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de 0, elles admettent toutes deux un développement limité en 0 à l'ordre 3 donné par la formule de Taylor-Young suivante (appliquée à une fonction $f$ ayant la même régularité) :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

En calculant les dérivées premières des fonctions sinus et tangente, on obtient

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Pour tout $x$ dans un voisinage de $0$ mais différent de $0$ on a

$$\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3} = \frac{x-\frac{x^3}{6}-x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0 \text{ par définition de } o(x^3).$$