Corrigé de l'examen du 12/01/2017

Exercice 1.

1. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \times 0 = 0$, et donc pour que f soit continue en 0, on pose $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2xe^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = (2x + \frac{2}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Comme la limite existe et est finie, on déduit que f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$.
4. La fonction f est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, par théorème on sait que $I = f([0, +\infty[)$ est aussi un intervalle. Pour déterminer I, on étudie les variations de f sur $[0, +\infty[$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$, on en déduit que f est strictement croissante et donc $I = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0, +\infty[$.
5. Notons $g : [0, +\infty[\mapsto I$ définie par $g(x) = f(x), \forall x \in [0, +\infty[$. Comme g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ elle est injective, comme de plus $I = f([0, +\infty[) = g([0, +\infty[) = \mathrm{Im} g$, g est à valeurs dans son image ce qui la rend surjective. L'application g est bijective, elle admet donc une application réciproque $g^{-1} : I \to [0, +\infty[$.
6. La fonction g^{-1} est dérivable en 0 si et seulement si g' ne s'annule pas en $g^{-1}(0)$. Or $g^{-1}(0) = y \Leftrightarrow 0 = g(y)$, par identification on trouve $y = 0$. Ainsi, $g'(g^{-1}(0)) = 0$ donc g^{-1} n'est pas dérivable en 0.
7. On a $g(1) = \frac{1}{e}$ (ce qui signifie que $g^{-1}(\frac{1}{e}) = 1$). De plus $g'(g^{-1})(\frac{1}{e})) = g'(1) = \frac{4}{e} \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{e}$ et
$$(g^{-1})'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{g'(g^{-1})(\frac{1}{e}))} = \frac{1}{\frac{4}{e}} = \frac{e}{4}.$$

Exercice 2.

1. f est définie lorsque $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $\frac{2x}{x^2-1} \in \mathcal{D}_{\text{arctan}}$ et $\frac{x-1}{x+1} \in \mathcal{D}_{\text{arctan}}$. Comme $\mathcal{D}_{\text{arctan}} = \mathbb{R}$, les seules conditions à vérifier sont $x^2 - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$ c'est à dire $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = \mathcal{D}_f$.
2. $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \\
&= \frac{2(x^2-1) - 2x \times 2x}{(x^2-1)^2} \times \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+(2x)^2}{(x^2-1)^2}} + \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} \\
&= \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2+4x^2} + \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \\
&= \frac{-2(1+x^2)}{x^4+2x^2+1} + \frac{2}{2x^2+2} \\
&= \frac{-2(1+x^2)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{-2}{(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{-1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$
3. On pose $g(x) = f(x) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$ et on veut montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = 0$. On a pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$g'(x) = f'(x) + \arctan'(x) = \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0.$$
La dérivée de g est nulle sur $]-1, 1[$ il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1, 1[,\ g(x) = c$. Comme $0 \in]-1, 1[$, on a
$$c = g(0) = f(0) + \arctan(0) + \frac{\pi}{4} = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + \underbrace{\arctan(-1)}_{=-\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + \frac{\pi}{4} = 0.$$
Conclusion : $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = 0$.

Exercice 3.

1. Posons $u(x) = \ln(x)$. On a $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int u'(x) \times u(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + C = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C, C \in \mathbb{R}$.
2. Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos(x)$. On a $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \sin(x)$. Les fonctions, u, u', v, v' sont continues sur $\mathbb{R}$, une intégration par parties donne :

$$\int x^2\cos(x)dx = [x^2\sin(x)] - \int 2x\sin(x)dx.$$

On pose à présent : $\tilde{u}(x) = 2x$ et $\tilde{v}'(x) = \sin(x)$. On a $\tilde{u}'(x) = 2$ et $\tilde{v}(x) = -\cos(x)$. Les fonctions, $\tilde{u}, \tilde{u}', \tilde{v}, \tilde{v}'$ sont continues sur $\mathbb{R}$, une intégration par parties donne :

$$\int 2x\sin(x)(x)dx = [-2x\cos(x)] + \int 2\cos(x)dx = -2x\cos(x) + 2\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $\displaystyle\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

3. Soit $x > -1$. Posons le changement de variables $t = \sqrt{1+x}$. On a premièrement $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$ c'est à dire $2dt = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}dx$ et deuxièmement $x = t^2 - 1$. Ainsi,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int 2(t^2-1)dt = 2\frac{t^3}{3} - 2t + C = \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 - 2\sqrt{1+x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.

1. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \neq 0$ donc l'équation proposée s'écrit

$$y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (*)$$

ou encore $y'(x) - a(x)y(x) = g(x)$, avec $a : x \mapsto -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Notons A une primitive de la fonction a. Les solutions de l'équation homogène associée à $(*)$ sont de la forme

$$f_h(x) = Ce^{A(x)} = Ce^{\ln(|\cos(x)|)} = Ce^{\ln(\cos(x))} = C \times \cos(x), C \in \mathbb{R}.$$

En effet, $a(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ (avec $u(x) = \cos(x)$) elle a donc pour primitive $A(x) = \ln(|u(x)|)$ et comme $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et alors $|\cos(x)| = \cos(x)$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Cherchons une solution particulière f_p de $(*)$: on remarque que $f_p(x) = \sin(x)$ convient car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Si on ne le remarque pas, par la méthode de variation de la constante on cherche $f_p(x)$ sous la forme $\varphi(x)\cos(x)$ avec φ une fonction à déterminer et on obtient la même chose. Les solutions de $(*)$ s'écrivent sous la forme

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = C \times \cos(x) + \sin(x), C \in \mathbb{R}.$$

Cherchons s'il existe une ou des solutions vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. On a $f(0) = C$, on prend alors $C = 1$.
Conclusion : l'équation avec condition initiale admet une unique solution $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

2. (a) Résolution de

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0. \quad (\star)$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation $(\star)$ est donné par $P_c(z) = z^2 + 4z + 5$, il admet deux racines complexes $z_1 = -2 - i$ et $z_2 = -2 + i$. Les solutions de $(\star)$ sont donc de la forme

$$f(x) = e^{-2x}\big(A\cos(x) + B\sin(x)\big) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Résolution de

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 9. \quad (\star\star)$$

Le polynôme caractéristique associé à $(\star\star)$ est donné par $P_c(z) = z^2 - 6z + 9$, il admet une racine réelle $x_0 = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée à $(\star\star)$ sont de la forme

$$f_h(x) = (Ax + B)e^{3x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de $(\star\star)$ sous forme d'une constante : $f_p(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Par identification on trouve $\lambda = 1$ et les solutions de $(\star\star)$ sont donc de la forme

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = (Ax + B)e^{3x} + 1, \; A, B \in \mathbb{R}.$$

(c) Résolution de

$$y''(x) - 4y(x) = e^{4x}. \quad (\star\star\star)$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation $(\star\star\star)$ est donné par $P_c(z) = z^2 - 4$, il admet deux racines réelles données par $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. Les solutions de l'équation homogène associée à $(\star\star\star)$ sont de la forme

$$f_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de $(\star\star\star)$ sous la forme $f_p(x) = \lambda e^{4x}, \lambda \in \mathbb{R}$. On a $f_p'(x) = 4\lambda e^{4x}$ et $f_p''(x) = 16\lambda e^{4x}$. De plus,

$$\begin{aligned} f_p''(x) - 4f_p(x) = e^{4x} \quad &\Leftrightarrow \quad 16\lambda e^{4x} - 4\lambda e^{4x} = e^{4x} \\ &\Leftrightarrow \quad 12\lambda e^{4x} = e^{4x} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f_p(x) = \dfrac{1}{12}e^{4x}$. Les solutions de $(\star\star\star)$ sont donc de la forme

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x} + \frac{1}{12}e^{4x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons s'il existe une ou des solutions vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$. On a

$$f(0) = A + B + \frac{1}{12} \text{ et } f'(x) = -2Ae^{-2x} + 2Be^{2x} + \frac{4}{12}e^{4x} \text{ donc } f'(0) = -2A + 2B + \frac{1}{3}.$$

En résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ \\ f'(0) & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A + B + \dfrac{1}{12} & = & 0 \\ \\ -2A + 2B + \dfrac{1}{3} & = & \dfrac{1}{2}, \end{array} \right.$$

on obtient $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = 0$, on obtient donc une unique solution vérifiant simultanément $(\star\star\star)$ et les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, elle est donnée par

$$f(x) = -\frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{12}e^{4x} = \frac{1}{12}(e^{4x} - e^{-2x}).$$