## Correction planche 3 : exercices 21,22,23

**Exercice 21**

Calculons le DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$. On a $\forall x \in ]-\infty, 1[$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\frac{(1-x)^2+1}{(1-x)^2}} = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+1} = \frac{1}{(1-x)^2+1} \Rightarrow f'(0) = 1 \times \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{-(-2(1-x))}{((1-x)^2+1)^2} = \frac{2-2x}{((1-x)^2+1)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{-2\left((1-x)^2+1\right)^2 - (2-2x)\left(-2(1-x)2((1-x)^2+1)\right)}{\left((1-x)^2+1\right)^4} \\
f^{(3)}(0) &= \frac{-2\left(1^2+1\right)^2 - 2\left(-2 \times 1 \times 2(1^2+1)\right)}{\left((1)^2+1\right)^4} = \frac{-8+16}{2^4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi le DL en 0 à l'ordre 3 de $f$ est donné par

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

que l'on peut aussi écrire

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + x^3\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

***Remarque :*** *en examen vous n'écrivez qu'une seule formule : soit celle avec le reste sous la forme $o(x^3)$ soit sous la forme $x^3\epsilon(x)$, choisissez celle avec laquelle vous êtes le plus à l'aise.*

**Exercice 22**

1. DL en 0 de $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$. On admet que ch vérifie les propriétés suivantes : $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) = \mathrm{ch}(x) &\Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) = \mathrm{sh}(x) &\Rightarrow f'(0) = 0 \\
f^{(2)}(x) = \mathrm{ch}(x) &\Rightarrow f^{(2)}(0) = 1 \\
f^{(3)}(x) = \mathrm{sh}(x) &\Rightarrow f^{(3)}(0) = 0 \\
&\dots \\
f^{(2k)}(x) = \mathrm{ch}(x) &\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 1 \\
f^{(2k+1)}(x) = \mathrm{sh}(x) &\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = 1
\end{aligned}$$

On remarque que les dérivées d'ordre pair valent 1 en 0 et celles d'ordre impair valent 0 en 0. Il ne reste donc que les termes d'ordre pair dans le DL :

$$\text{Si } n \text{ pair : } f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{f^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)$$

$$\text{Si } n \text{ impair : } f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{f^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)$$

Pour s'en convaincre, on peut tester pour $n = 2$ ou $n = 3$ ces formules :

$$\text{Si } n=2 : f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{2}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^2) = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^2) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$
$$\text{Si } n=3 : f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{3-1}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^3) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

Retrouvons ces DL grâce à celui de l'exponentielle : on a $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \qquad e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}\right) + o(x^n) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k + (-x)^k}{k!} + o(x^n)
\end{aligned}$$

on remarque que

$$x^k + (-x)^k = x^k + (-1)^k x^k = \begin{cases} x^k + x^k = 2x^k & \text{si} \quad k \text{ pair} \\ x^k - x^k = 0 & \text{si} \quad k \text{ impair.} \end{cases}$$

On retrouve que le DL de $\mathrm{ch}(x)$ ne contient que des termes d'ordre pair et on l'écrit :

$$\begin{aligned}
\text{Si } n \text{ pair} : \mathrm{ch}(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\
\text{Si } n \text{ impair} : \mathrm{ch}(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n)
\end{aligned}$$

***Remarque :*** *cette question était assez théorique, en examen on vous demandera plutôt de donner le DL en 0 à l'ordre 2, 3 ou 4 et non pas à l'ordre $n$ quelconque.*

2. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $g(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. On calcule $g(0), g'(0), g^{(2)}(0)$ et $g^{(3)}(0)$. Rappel : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, ((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. On applique cette formule avec $\alpha = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1+x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g(0) = 1 \\
g'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3} \\
g^{(2)}(x) &= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow g^{(2)}(0) = -\frac{2}{9} \\
g^{(3)}(x) &= -\frac{5}{3} \times \left(-\frac{2}{9}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow g^{(3)}(0) = \frac{10}{27}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) = 1 + \frac{1}{3} \times \frac{x}{1!} - \frac{2}{9} \times \frac{x^2}{2!} + \frac{10}{27} \times \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3),$$

ou de façon équivalente :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + x^3\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

***Remarque :*** *pour le DL de $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ on applique cette fois-ci la formule à $\alpha = -\frac{1}{2}$.*

3. Donner le DL en 2 à l'ordre 2 de $h(x) = \sqrt{(x)}$. On calcule $h(2), h'(2), h^{(2)}(2)$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{(x)} \Rightarrow h(2) = \sqrt{2} \\ h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow h'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ h^{(2)}(x) &= \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} \Rightarrow h^{(2)}(2) = \frac{-1}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \times (x-2) - \frac{1}{8\sqrt{2}} \times \frac{(x-2)^2}{2!} + o_2\left((x-2)^2\right) = \sqrt{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x-2)^2}{16\sqrt{2}} + o_2\left((x-2)^2\right)$$

ou de façon équivalente :

$$h(x) = \sqrt{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x-2)^2}{16\sqrt{2}} + (x-2)^2\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 2}\epsilon(x) = 0.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

(somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$).
Par ailleurs, $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 elle admet donc un DL en 0 à l'ordre $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donné par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n) \text{ avec } C_0, C_1, ..., C_k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (1-x^{n+1}) \times \frac{1}{1-x} &= (1-x^{n+1}) \times \left(\sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n) - \underbrace{x^{n+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)\right)}_{=o(x^n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

En effet,

$$\frac{x^{n+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)\right)}{x^n} = \underbrace{x\sum_{k=0}^{n} C_k x^k}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} + \underbrace{x^{n+1}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \underbrace{\frac{o(x^n)}{x^n}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{donc } x^{n+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n)\right) = o(x^n).$$

On a donc

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Par unicité du DL on obtient donc $C_k = 1 \ \forall k \in \{0, ..., n\}$.

**Exercice 23**

Donner le DL en $-1$ à l'ordre 7 de $f(x) = x^4 - 1$. On calcule pour cela $f(-1), f'(-1), ..., f^{(7)}(-1)$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 1 \Rightarrow f(-1) = 0 \\
f'(x) &= 4x^3 \Rightarrow f'(-1) = -4 \\
f^{(2)}(x) &= 12x^2 \Rightarrow f^{(2)}(-1) = 12 \\
f^{(3)}(x) &= 24x \Rightarrow f^{(3)}(-1) = -24 \\
f^{(4)}(x) &= 24 \Rightarrow f^{(4)}(-1) = 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(5)}(-1) = 0 = f^{(6)}(-1) = f^{(7)}(-1).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + f^{(2)}(-1)\frac{(x+1)^2}{2!} + f^{(3)}(-1)\frac{(x+1)^3}{3!} + ... + f^{(7)}(-1)\frac{(x+1)^7}{7!} + (x+1)^7\epsilon(x) \\
&= -4(x+1) + 12\frac{(x+1)^2}{2!} - 24\frac{(x+1)^3}{3!} + 24\frac{(x+1)^4}{4!} + (x+1)^7\epsilon(x) \\
&= -4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 + (x+1)^7\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.
\end{aligned}$$

***Remarque :*** *on laisse le DL écrit sous cette forme, on ne développe surtout pas les quantités $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$... On pense juste à simplifier les expressions $\dfrac{f^{(k)}(-1)}{k!}$ comme fait pour passer à la dernière ligne du précédent calcul.*

**Exercice 30**

***Remarque :*** *ne tenez pas compte de la rédaction proposée en TD elle est fausse !*

2) Donner le DL de $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sin(x)}$ en 0 à l'ordre 2.

On commence par le DL de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ : on a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)} \\
&= \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)\right)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+u} \text{ en posant } u = -\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon(x) \text{ si } x \text{ proche de 0 alors } u \text{ est proche de 0} \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - u + u^2 + o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} \times \left[1 - \left(-\frac{x^2}{6}\right) + \left(-\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{1}{x} \times \left[1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] \text{ car on met } \left(-\frac{x^2}{6}\right)^2 = \frac{x^4}{6} \text{ dans } o(x^2)
\end{aligned}$$

Il reste à faire le DL de $\ln(1+\tan(x))$ : au final on veut un DL à l'ordre 2 et comme on va multiplier $\ln(1+\tan(x))$

par $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^1}$ on va perdre 1 degré, il faut donc faire un DL de $\ln(1+\tan(x))$ à l'ordre $2+1=3$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan(x)) &= \ln\left(1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\
&= \ln(1+u) \text{ en posant } u = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3)\\
&= \left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3}+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+x^5+\frac{1}{3}x^7+\frac{x^9}{27}\right)+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+\tan(x))}{\sin(x)} &= \left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\right]\times\frac{1}{x}\times\left[1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right]\\
&= \left[1-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+\frac{o(x^3)}{x}\right]\times\left[1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right] \text{ or } \frac{o(x^3)}{x}=o(x^2) \text{ car } \frac{\frac{o(x^3)}{x}}{x^2}=\frac{o(x^3)}{x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}0\\
&= \left[1-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o(x^2)\right]\times\left[1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right]\\
&= 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^4}{18}+o(x^2)\\
&= 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o(x^2)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{6}+o(x^2).
\end{aligned}$$

3) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est donnée par $y = 1-\frac{x}{2}$, la position de $y$ par rapport à $\mathscr{C}_f$ est donnée par le signe de $\frac{5x^2}{6}$ au voisinage de 0. Comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{5x^2}{6}\geqslant 0$, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au **dessus** de sa tangente.