INTERROGATION ECRITE: Mathématiques 1

Exercice 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée du plan, et les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = (x+y)\overrightarrow{i} + (2x+1)\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{b} = (x+y+3)\overrightarrow{i} + (3x+y)\overrightarrow{j}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $x, y \in \mathbb{R}$ a-t-on l'égalité $5 \times \overrightarrow{a} = 2 \times \overrightarrow{b}$? (2 points)

$$5\overrightarrow{a} = 5(x+y)\overrightarrow{i} + 5(2x+1)\overrightarrow{j}, 2\overrightarrow{b} = 2(x+y+3)\overrightarrow{i} + 2(3x+y)\overrightarrow{j}$$

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b} &\Leftrightarrow 5(x+y) = 2(x+y+3) \wedge 5(2x+1) = 2(3x+y) \\ &\Leftrightarrow 5x+5y = 2x+2y+6 \wedge 10x+5 = 6x+2y \\ &\Leftrightarrow x+y = 2 \wedge 4x-2y = -5 \\ &\Leftrightarrow y = 2-x \wedge 4x - 2(2-x) = -5 \\ &\Leftrightarrow y = 2-x \wedge 6x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \wedge y = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 2: Trouver le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ en sachant que la somme de ses coordonnées est égale à 1, et que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2; -2; 2)$. (1 point)

$$\overrightarrow{v} = \lambda(2, -2, 2) = (2\lambda, -2\lambda, 2\lambda).$$

$$2\lambda - 2\lambda + 2\lambda = 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(2, -2, 2) = (1, -1, 1).$$

Exercice 3. On considère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée du plan, et les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}.$$

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires? (1 point)

$$\lambda(\overrightarrow{u}) = \mu(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \lambda(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}) = \mu(4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{i} - 2\lambda\overrightarrow{j} = 4\mu\overrightarrow{i} + 2\mu\overrightarrow{j}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 4\mu \wedge -2\lambda = 2\mu \Leftrightarrow \lambda = 4\mu = -\mu \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Calculez les normes $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$ et le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. (1 point)

$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \ \| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 0.$$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils perpendiculaires? Forment-ils une base orthonormée du plan? (1 point)
Oui, ils sont perpendiculaires comme $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Non, ils ne forment pas une base orthonormée comme ils ne sont pas de norme un.

d) Soit x, y, deux nombres réels et le vecteur $\overrightarrow{w} = x \times \overrightarrow{i} + y \times \overrightarrow{j}$. Calculez (en fonction de x et y) la norme $\|\overrightarrow{w}\|$ et le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$. (1 point)

$$\| \overrightarrow{w} \| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1 \cdot x + (-2) \cdot y = x - 2y.$$

e) Trouver x, y de sorte que $\| \overrightarrow{w} \| = \| \overrightarrow{u} \|$ et que $\overrightarrow{w}$ forme un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec $\overrightarrow{u}$. (2 points)

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \| \overrightarrow{u} \| \cdot \| \overrightarrow{w} \| \cdot \cos(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow x - 2y = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \wedge \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 2y + \frac{5}{2} \wedge x^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 2y + \frac{5}{2} \wedge (2y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 5.$$

$$(2y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow 4y^2 + 10y + \frac{25}{4} + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 + 2y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \vee (x, y) = (\frac{1}{2} - \sqrt{3}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Exercice 4. On considère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de l'espace à trois dimensions, et les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base. (1 point)

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (0, -1, 1) \wedge (-2, -1, 3) = ((-1) \cdot 3 - 1 \cdot (-1), -0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2), 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2))$$

$$= (-2, -2, -2), \ (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 6 \neq 0$$

Les vecteurs en question forment donc une base.

b) Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$. La base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est-elle orthogonale? (1 point)

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 4, \ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0.$$

La base en question n'est pas orthogonale comme $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$.

c) Trouvez un vecteur $\overrightarrow{z}$ qui soit orthogonal en même temps à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{w}$. Est-ce $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$ est une base orthonormée? (2 points)

Le vecteur

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = (0, -1, 1) \wedge (-1, -1, -1) = (2, -1, -1) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$. La base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$ n'est pas orthonormée comme $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$.

d) Soit x, y, deux nombres réels et le vecteur $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$. Calculez (en fonction de x et y) le produit vectoriel $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{p}$. (1 point)

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{p} = (-2, -1, 3) \wedge (1, x, y) = (-y - 3x, 2y + 3, -2x + 1)$$

$$= (-y - 3x)\overrightarrow{i} + (2y + 3)\overrightarrow{j} + (-2x + 1)\overrightarrow{k}.$$

e) Pour quelle(s) valeur(s) de x et y, les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{p}$ sont-ils colinéaires? (2 points)

$$\overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{p} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow -y - 3x = 0 \wedge 2y + 3 = 0 \wedge -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = -\frac{3}{2}.$$

Exercice 5 : Domaine maximal de définition On rappelle que

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ peut se calculer}\}$$

est le domaine maximal de définition d'une règle de calcul (une formule) $f(x)$.

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$, $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$. (1 point)

$$\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*,$$

$$x > 2 \Rightarrow 2 - x < 0 \wedge x < 2 \Rightarrow 2 - x > 0, \;\; x > -2 \Rightarrow 2 + x > 0 \wedge x < -2 \Rightarrow 2 + x < 0$$

$$\frac{2-x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_f =]-2, 2[.$$

b) Déterminer $\mathcal{D}_g$, $g(x) = \sqrt{4x+1} - \sqrt{3-2x}$. (1 point)

$$\mathcal{D}_{\sqrt{4x+1}} = [-\frac{1}{4}, +\infty[, \quad \mathcal{D}_{\sqrt{3-2x}} =]-\infty, \frac{3}{2}] \;\Rightarrow\; \mathcal{D}_g = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}].$$

c) Déterminer $\mathcal{D}_h$, $h(x) = \frac{1}{|x+4| + x - 4}$. (1 point)

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow |x+4| + x - 4 = x + 4 + x - 4 = 2x,$$

$$x + 4 < 0 \Rightarrow |x+4| + x - 4 = -(x+4) + x - 4 = -8,$$

d'où

$$|x+4| + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

et

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^*.$$

d) Déterminer si la fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. (1 point)

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-(-x)}{2+(-x)}\right) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \ln\left((\frac{2-x}{2+x})^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x).$$

La fonction f est paire.