Exercice 1 (4,5)

1) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrons que (u_n) est minoré. Par divergence vers $+\infty$ on a

$\forall M>0\ \exists \tilde{N}\in\mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}, n\geq\tilde{N} \Rightarrow u_n > M$ / Pour $M=1$ $\exists \tilde{N}_1\in\mathbb{N}$ $n\geq\tilde{N}_1 \Rightarrow u_n>1$ /

De plus, pour tout $n\in\{0,\dots,\tilde{N}_1\}$ on peut minorer u_n par un élément de $\{u_0,\dots,u_{\tilde{N}_1}\}$ car l'ensemble est fini / (2)

On a donc (u_n) minoré par $\min(1, \min\{u_0,\dots,u_{\tilde{N}_1}\})$ /

2) a) Soit (v_n) une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. Montrons que $(|v_n|)$ converge vers $|l|$. Par convergence de (v_n) vers l on a

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow |v_n-l|<\varepsilon$ / (2)

D'après la 2nde inégalité triangulaire on a $|v_n-l| > \big||v_n|-|l|\big|$ /

Ce qui donne $\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon \Rightarrow \big||v_n|-|l|\big|<\varepsilon$ /

On a donc convergence de $(|v_n|)$ vers $|l|$ /

b) La réciproque s'écrit : si $(|v_n|)$ converge vers $|l|$ alors (v_n) converge vers l. Elle est fausse (0,5)

Contre-exemple : $v_n=(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 1$ mais (v_n) ne converge pas.

Exercice 2 (2)

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} e^{n^3+n^2+1} = +\infty$ c'est à dire

$\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow e^{n^3+n^2+1} > M$ /

Fixons $M>0$.

On a pour tout n dans $\mathbb{N}$ $n^3+n^2+1 > n^3$ et donc $e^{n^3+n^2+1} > e^{n^3}$

De plus, $e^{n^3} > M \iff n^3 > \ln(M) \iff n > (\ln(M))^{1/3}$ (2)

En posant $N = E\left(\left|(\ln(M))^{1/3}\right|\right)+1$ On a alors $N\in\mathbb{N}$ et

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow e^{n^3} > M \Rightarrow e^{n^3+n^2+1} > e^{n^3}$

et on a bien divergence de (u_n) vers $+\infty$.

Exercice 3 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$ 4

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$.

Hérédité Fixons $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \geq 0$ car $u_n \geq 0$ et $u_n^2+1 \geq 0$. 1

2) Montrons que (u_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(u_n^2+1)}{u_n^2+1} = \dfrac{-u_n^3}{u_n^2+1} \leq 0$ car $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi, (u_n) est décroissante. 1,5

3) La suite (u_n) est minorée et décroissante, par théorème elle est donc convergente, notons ℓ sa limite.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$ on en déduit que $\ell \geq 0$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et en passant à la limite dans l'égalité 1,5

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$ on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2+1}$ ce qui donne $\ell^2+1 = 1$

et donc $\underline{\ell = 0}$

Exercice 4 5,5

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{n^6+2n^4+n^2}{n^2+1} - n^3\sqrt{n^2+2}$

$$= \frac{n^2(n^4+2n^2+1)}{n^2+1} - n^3\sqrt{n^2+2}$$

$$= \frac{n^2(n^2+1)^2}{n^2+1} - n^3\sqrt{n^2+2}$$

$$= n^2(n^2+1) - n^3\sqrt{n^2+2}$$

$$= \frac{(n^4+n^2-n^3\sqrt{n^2+2})(n^4+n^2+n^3\sqrt{n^2+2})}{n^4+n^2+n^3\sqrt{n^2+2}}$$ 2,5

$$= \frac{(n^4+n^2)^2 - n^{3\times 2}(n^2+2)}{n^4+n^2+n^3\sqrt{n^2+2}}$$

$$= \frac{n^8 + 2n^6 + n^4 - n^8 - 2n^6}{n^4 + n^2 + n^3 \times n\sqrt{1+2/n^2}}$$

$$= \frac{n^4}{n^4\left(1 + 1/n^2 + \sqrt{1+2/n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 1/n^2 + \sqrt{1+2/n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

2) a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak+b) = a\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} b$

$$= a\,\frac{n(n+1)}{2} + b \times (n-1+1)$$

1

$$= a\,\frac{n(n+1)}{2} + bn$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n+1} - \dfrac{1+n+3n^2}{2n}$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)}{n+1} - \frac{1+n+3n^2}{2n}$$

$a = 3$

$b = -2$

$$= \frac{1}{n+1}\left(3\,\frac{n(n+1)}{2} - 2n\right) - \frac{1+n+3n^2}{2n}$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{2n}{n+1} - \frac{1+n+3n^2}{2n}$$

$$= \frac{3n(n+1)n - 2n \times 2n - (1+n+3n^2) \times 2(n+1)}{2n(n+1)}$$

1,5

$$= \frac{\cancel{3n^3} + 3n^2 - 4n^2 - n - n^2 - 3n^3 - 1 - n - 3n^2}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{-5n^2 - 2n - 1}{2n^2 + 2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{5}{2}$$

Exercice 5 $0 < a < b$ (4)

5,5 $a_0 = a$, $b_0 = b$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n + b_n > 0$.

Initialisation $a_0 + b_0 = a + b > 0$ car $a > 0$ et $b > 0$

Hérédité Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $a_n + b_n > 0$.

Montrons que $a_{n+1} + b_{n+1} > 0$. (1)

On a $a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} + \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} = a_n + b_n > 0$ Par hypothèse

Comme $a_n + b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on en déduit que a_{n+1} et b_{n+1} sont bien définis et par conséquent les suites (a_n) et (b_n) aussi.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ et $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} \times \dfrac{a_n + b_n}{b_n^2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)$$

$$= 2\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$= 2v_n$$

(2)

La suite (v_n) est géométrique et s'écrit $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 \times 2^n = \ln\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right) 2^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ car $2^n \to +\infty$ et $\ln\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) < 0$ car $0 < \dfrac{a}{b} < 1$

De cette façon $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = 0^+$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = a_n - b_n$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = \dfrac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = a_n - b_n = u_n$ (0,5)

La suite (u_n) est donc constante égale à $u_0 = a_0 - b_0 = a - b$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{v_n} = e^{\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)} = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_n - b_n + b_n}{b_n} = 1 + \dfrac{a_n - b_n}{b_n} = 1 + \dfrac{a - b}{b_n}$ (1)

4) D'après 3) b) on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $e^{v_n} = 1 + \frac{a-b}{b_n}$ et donc

$\frac{a-b}{b_n} = e^{v_n} - 1$ ce qui donne $b_n = \frac{a-b}{e^{v_n}-1}$

Car $e^{v_n} - 1 \neq 0$: en effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < 0$ Donc $e^{v_n} < 1$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{a-b}{0-1} = \underline{b-a}$

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - b_n = a-b$ ce qui donne $a_n = b_n + a - b$

Par passage à la limite on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = b - a + a - b = \underline{0}$

1