①

Corrigé DS1

2019-2020

Mardi 11 février 2020

Exercice 1

1) $\forall x>0$, $h(x) = \dfrac{x\cos(1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $\dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

En effet, $x\mapsto \cos(1/x)$ est borné entre -1 et 1 et x tend vers 0 donc le produit des deux tend vers 0.

$\forall x<0$, $h(x) = \dfrac{x\cos(1/x)}{\ln(-x)} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ pour les mêmes raisons qu'en 0^+

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0$

Pour que h soit continue en 0, on pose $\alpha = 0$

2) Posons τ : $x \mapsto \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$

Si $x>0$ alors $\tau(x) = \dfrac{\cos(1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $x\mapsto \cos(1/x)$ est borné entre -1 et 1 et $\dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

Si $x<0$ alors $\tau(x) = \dfrac{\cos(1/x)}{\ln(-x)} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ pour les mêmes raisons qu'en 0^-

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \tau(x) = 0$.

h est donc dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Exercice 2

1) f est composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{y \to 0} -\frac{1}{2} \frac{\sin(y)}{y} = -\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \cos(0) = 1$ f est donc prolongeable par continuité en 0 avec $\tilde{f} : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5) $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ existent et sont finies. D'après le Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$

Exercice 3

1) Comme f est trois dérivable alors f' est deux fois dérivable sur I et donc g aussi

2) $\forall x \in I$, $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\left(f'(a) + f'(x)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3K(x-a)^2$

$$= \frac{1}{2}\left(f'(x) - f'(a)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3K(x-a)^2$$

et $g''(x) = \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{2} f''(x) - \frac{x-a}{2} f'''(x) + 6K(x-a)$

$$= (x-a)\left[6K - \frac{1}{2} f'''(x)\right]$$

3) $g(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g'(a) = \frac{1}{2}(f'(a) - f'(a)) - 0 + 0 = 0$

4) On a $g(a) = g(b) = 0$, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc d'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

5) On a $g'(c) = g'(a) = 0$, en appliquant le Théorème de Rolle à g' sur $]a,c[$ On a (car g' continue sur $[a,c]$ et dérivable sur $]a,c[$) il existe $\theta \in]a,c[$ tel que $g''(\theta) = 0$

Or $g''(\theta) = (\theta - a)\left[6K - \frac{1}{2}f'''(\theta)\right]$

Donc $g''(\theta) = 0 \iff 6K - \frac{1}{2}f'''(\theta) = 0$ car $\theta - a \neq 0$

$\iff K = \frac{1}{12}f'''(\theta)$ $(*)$

Calculons K : On a

$g(b) = 0 \iff f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) + K(b-a)^3 = 0$

$\iff K(b-a)^3 = f(a) - f(b) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b))$

En multipliant $(*)$ par $(b-a)^3$ On obtient

$f(a) - f(b) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) = \frac{1}{2}(b-a)^3 f'''(\theta)$

d'où $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{1}{2}(b-a)^3 f'''(\theta)$

2) Soit $x \in]0,1[$. f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. D'après le TAF, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que $f(x)-f(0) = f'(\theta_x)\, x$
D'où $g(x) = f'(\theta_x)$.

Exercice 4

1) f est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le Théorème de Weierstrass elle est borné sur $[0,1]$ et atteint ses bornes

3) a) $g(0) = 0$ et $g(1) = f(1) = 0$

b) Comme f est dérivable en 0 on a (puisque $f(0)=0$)

$$f'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x)$$

Comme $f'(0) = 0 = g(0)$ on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = g(0)$.
g est donc continue en 0.

c) Comme f est dérivable sur $]0,1[$ alors $x \mapsto f(x)/x$ est dérivable sur $]0,1[$ et donc g aussi

d) $\forall x \in]0,1[$, $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$

4) g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $g(0)=g(1)$
Par application du Théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(c) = 0 \iff \dfrac{c f'(c) - f(c)}{c^2} = 0$

$\iff c f'(c) - f(c) = 0$

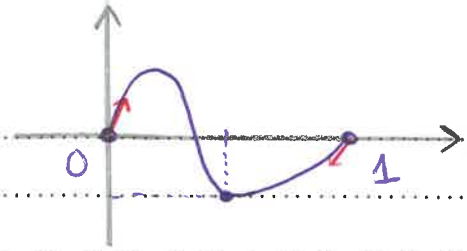
$\iff c f'(c) = f(c)$

4) $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ est une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en c

5) montrons que la Tangente passe par $(0,0)$: on a
$0 = f'(c)(0-c) + f(c) \iff +c f'(c) = f(c)$ Vrai d'après la question 4).
Ainsi la tangente passe bien par l'Origine

5

Exercice 5 1)



2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in [0,1], \; 0 < x < \delta \Rightarrow |g(x) - f'(0)| < \varepsilon$

3) On utilise la 2) avec $\varepsilon = f'(0)/2 > 0$

Alors il existe $\delta > 0 : \forall x \in [0,1], \; 0 < x < \delta \Rightarrow |g(x) - f'(0)| < \frac{f'(0)}{2}$

En particulier, on a $g(x) - f'(0) > -f'(0)/2$

et donc $g(x) > f'(0)/2$

Notons $\bar{\delta} = \min(\delta, 1)$

On pose alors $I =]0, \bar{\delta}[\subset]0,1]$ et on a le résultat demandé

4) Pour tout $x \in I$, on a $x > 0$ et $g(x) > f'(0)/2 > 0$

Or $g(x) = f(x)/x$

Ainsi, $g(x) > 0 \iff f(x)/x > 0 \iff f(x) > 0$

Il suffit de prendre $c = \bar{\delta}/2$, et on a bien $f(c) > 0$.

Remarque : $c \neq 1$ car $f(1) = 0$

5) f est continue sur $[0,1]$ donc entre c et $d = 1/2$

comme $f(c) > 0$ et $f(d) < 0$, d'après le T.V.I il existe

alors $d \in]0,1[$ tel que $f(d) = 0$

(d se trouve entre c et $1/2$ plus précisément)

Finalement, on a
- $f(0) = f(1) = f(d) = 0$
- f continue sur $[0,d]$ et $[d,1]$
- f dérivable sur $]0,d[$ et $]d,1[$

En appliquant le théorème de Rolle à f sur $[0,d]$ et $[d,1]$,
il existe alors $x_0 \in]0,d[$ et $y_0 \in]d,1[$ tels que
$f'(x_0) = f'(y_0) = 0$. f' s'annule bien deux fois sur $]0,1[$.

6) Par définition de leurs existences, f admet des extrema locaux en x_0 et y_0 (Cf preuve du Théorème de Rolle). Ainsi on a bien le résultat demandé.

Exercice 6 Notons que $(*) \iff \ln\left(\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right) = \frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}(b-a)$

$\iff \ln(\varphi(b)) - \ln(\varphi(a)) = \frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}(b-a)$

car $\varphi(b) > 0$ et $\varphi(a) > 0$

Posons $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln(\varphi(x))$

f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ par composition.

En appliquant le TAF à f sur $[a,b]$, il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

d'où $\ln(\varphi(b)) - \ln(\varphi(a)) = \frac{\varphi'(c)}{\varphi(c)}(b-a)$ et on a bien $(*)$.