Exercice 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x-\pi/2) = \cos(3x-\pi) \iff \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x-\pi/2)\right) = \cos(3x-\pi)$

$$\iff \cos(\pi - x) = \cos(3x-\pi)$$

$$\iff \begin{cases} \pi - x = 3x - \pi + 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \pi - x = -(3x-\pi)+2k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x = 2\pi + 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x = 0+2k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{x = \frac{k\pi}{2}, \ k\in\mathbb{Z}}$$

2) Calculons $\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)$

On a $\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{12\pi+4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}+4\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Car $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Comme $\frac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$ on a $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

Finalement, $\arccos\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$

3) On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - x^2$. $f$ est continue sur $[0,\pi]$ et de plus $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$. On a donc $f(0)\times f(-1) < 0$. D'après le TVI, il existe $x_0 \in ]0,\pi[$ : $f(x_0) = 0$ ce qui donne $\cos(x_0) - x_0^2 = 0$

L'équation proposée admet donc au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$.

Exercice 2 $\quad f : x \mapsto 2\sqrt{x}\arctan(x^2) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

1) $f$ est définie sur $I = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0,\ x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 0\right\} = ]0,+\infty[$

2) $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car $\mathcal{D}_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 0\right\}$

3) $\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}\arctan(x^2) + 2\sqrt{x} \times 2x \times \frac{1}{1+(x^2)^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(x^2) + \frac{4x\sqrt{x}}{1+x^4} + \frac{x}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x}\arctan(x^2) + \frac{4x\sqrt{x}}{1+x^4} + \frac{1}{x}$$

Exercice 3

1) $g_1(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)\right) + (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{2\times 9}x^3 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= -\frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} + o(x^3)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + o(x^3)$$

$g_2(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Le DL de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

On a $g_2(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$= \sqrt{1+u}$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ si $x$ proche de 0 alors $u$ proche de 0

$$= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{g_2(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)}$$

$= \frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x^2}{4}+o(x^3)$ proche de 0 si $x$ proche de 0

$= 1+u+u^2+u^3+o(u^3)$

$= 1+\left(\frac{x^2}{4}\right)+o(x^3)$

2) $h(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$

$= g_1(x) \times \frac{1}{g_2(x)}$

$= \left(-\frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{4}\right)+o(x^3)$

$= -\frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}x^3 + \frac{2}{3\times 4}x^2 + o(x^3)$

$= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{31}{36}x^3 + o(x^3)$

3) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ en 0 est $y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x$.
La position de $y$ par rapport à $\mathcal{C}_h$ nous est donnée par le signe de $-\frac{31}{36}x^3$ au voisinage de 0. Comme $-\frac{31}{36}x^3$ change de signe en 0, 0 est donc un point d'inflexion : si $x<0$ alors $-\frac{31}{36}x^3>0$ et $\mathcal{C}_h$ est au dessus de $y$ alors que pour $x>0$, $\mathcal{C}_h$ est en dessous de $y$.

Exercice 4

1) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-x}{1+6x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{6x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{6x} = 0^-$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{2x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x-(x^2+1)}{2x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+x+1}{2x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+1/x+1/x^2\right)}{2x\left(\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}\right)}$$

car $\sqrt{x^2}=x$ pour $x>0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-1+1/x+1/x^2\right)}{2x^2\left(\sqrt{2/x^2+1/x}+\sqrt{1+1/x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+1/x+1/x^2}{2\left(\sqrt{2/x^2+1/x}+\sqrt{1+1/x}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

Exercice 5



1) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 1 & x-1 \\
\cline{2-2}
-x^3 + x^2 & x^2 + x + 1 \\
\cline{1-1}
= x^2 - 1 & \\
-x^2 + x & \\
\cline{1-1}
= x - 1 &
\end{array}
$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} x^2+x+1 = 3$

2) L'application $f$ est continue sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ car $x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x-1}$ est continue sur ces intervalles.

Pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de poser $\alpha = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ c'est à dire $\alpha = 3$.