DS2 - Vendredi 16 mars 2018

Exercice 1

1) a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

b) Montrons l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in [0,2] \quad |x-1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+3} - \sqrt{4}| < \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et cherchons un tel $\delta > 0$. Pour tout x dans I on a

$$|\sqrt{x+3} - \sqrt{4}| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \sqrt{x+3} - 2 < \varepsilon$$
$$\iff 2 - \varepsilon < \sqrt{x+3} < 2 + \varepsilon \quad (*)$$

<u>1er Cas</u> si $2 - \varepsilon \leqslant 0$ alors $(*) \iff 0 < \sqrt{x+3} < 2 + \varepsilon$

et $0 < \sqrt{x+3} < 2 + \varepsilon \iff 0 < x + 3 < (2+\varepsilon)^2$
$$\iff -3 < x < (2+\varepsilon)^2 - 3$$

De plus, $|x - 1| < \delta \iff 1 - \delta < x < 1 + \delta$

Il suffit de choisir $\delta > 0$ tel que
$-3 \leqslant 1 - \delta$ et $1 + \delta \leqslant (2+\varepsilon)^2 - 3$

c'est à dire $\delta \leqslant 4$ et $\delta \leqslant (2+\varepsilon)^2 - 4 = \varepsilon^2 + 4\varepsilon$

Par exemple $\delta = \min(4, \varepsilon^2 + 4\varepsilon) = 4$ car $\varepsilon \geqslant 2$.

<u>2ème Cas</u> si $2 - \varepsilon > 0$ alors $(*) \iff (2-\varepsilon)^2 < (\sqrt{x+3})^2 < (2+\varepsilon)^2$
$$\iff (2-\varepsilon)^2 - 3 < x < (2+\varepsilon)^2 - 3$$

Il suffit de choisir $\delta > 0$ tel que $(2-\varepsilon)^2 - 3 \leqslant 1 - \delta$ et $(2+\varepsilon)^2 - 3 \geqslant 1 + \delta$

C'est à dire $\delta \leqslant 4\varepsilon - \varepsilon^2$ et $\delta \leqslant 4\varepsilon + \varepsilon^2$

Par exemple $\delta = \min(4\varepsilon - \varepsilon^2, 4\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$ car $\varepsilon < 2$.
$= \varepsilon(4 - \varepsilon)$

<u>Conclusion</u> Pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé l'existence d'un $\delta > 0$ vérifiant la définition, l'application f est donc bien continue en $x_0 = 1$

2) Par continuité de k en 2 on a $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - 2| < \delta \Rightarrow |k(x) - k(2)| < \varepsilon$

En particulier, $|k(x) - k(2)| < \varepsilon \Rightarrow k(x) < k(2) + \varepsilon$

Pour $\varepsilon = -\dfrac{k(2)}{2} > 0$ on obtient $k(x) < k(2) - \dfrac{k(2)}{2} = \dfrac{k(2)}{2} < 0$ sur $I =]2-\delta, 2+\delta[$

Exercice 2

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

montrons que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ c'est à dire

$\forall A > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\},\ |x-3| < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{(x-3)^2} > A$

Fixons $A > 0$ et cherchons un tel $\delta > 0$.

On a pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\dfrac{1}{(x-3)^2} > A \iff \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^2}} > \sqrt{A}$

$\iff \dfrac{1}{|x-3|} > \sqrt{A}$

$\iff |x-3| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$

Il suffit de choisir $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}$

Par exemple $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ convient et on a le résultat.

Exercice 3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-3\}$ $f(x) = \dfrac{-x^3+8x-3}{-x-3}$

$$\begin{array}{l|l}
-x^3+8x-3 & x+3 \\ \cline{2-2}
+x^3+3x^2 & -x^2+3x-1 \\ \cline{1-1}
= 3x^2+8x-3 & \\
-3x^2-9x & \\ \cline{1-1}
= -x-3 & \\
+x+3 & \\ \cline{1-1}
= 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-3\}$,

$f(x) = \dfrac{(x+3)(-x^2+3x-1)}{-(x+3)}$

$= x^2-3x+1$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ \neq}} f(x) = 19$

2) f admet une limite finie en -3 elle est donc prolongeable par continuité en -3 et son prolongement $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ est défini par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \\ 19 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

Exercice 4 g est continue en 0 si elle admet une limite en 0 égale à $g(0)$.

Etude de la limite en 0^- : $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1$ Car $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Etude de la limite en 0^+ : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = -1$

Car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+1/e^{1/x}} = 1$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ On en déduit que g n'admet pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue en ce point.

Exercice 5

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.

2) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(2x) - 2\sin(x) + 2$

f est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$, $f(-\pi/2) = \cos(-\pi) - 2\sin(-\pi/2) + 2 = +3$

et $f(\pi/2) = \cos(\pi) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = -1$

Comme $f(-\pi/2) \cdot f(\pi/2) < 0$ on en déduit par le corollaire du TVI qu'il existe $c \in]\pi/2, \pi/2[$ tel que $f(c) = 0$.

Conclusion : l'équation proposée possède au moins pour solution $c \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Exercice 6

1) Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par continuité de f en 0, on sait que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.
Comme sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on sait que $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par unicité de la limite et d'après l'égalité $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, on en déduit que $f(0)=0$ ce qui est impossible car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. <u>Conclusion</u> La suite (u_n) ne peut pas converger vers 0.

2) Supposons par l'absurde qu'il existe $l\in[-1,1]$ tel que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=l$.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n=\frac{2}{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0^+$ Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=l$.

Cherchons deux sous-suites de $(g(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers des limites différentes :
On cherche $\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $g(v_{\varphi(n)})=1$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$g(v_{\varphi(n)})=\sin\left(\frac{1}{v_{\varphi(n)}}\right)=\sin\left(\frac{\varphi(n)\pi}{2}\right)$ Or on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

On pose alors $\frac{\varphi(n)\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ ce qui donne $\varphi(n)=4n+1\in\mathbb{N}^*$ avec φ croissante.
De la même façon on cherche $\psi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $g(v_{\psi(n)})=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ Or $\sin(2n\pi)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
On pose alors $\frac{\psi(n)\pi}{2}=2n\pi$ ce qui donne $\psi(n)=4n\in\mathbb{N}^*$ avec ψ croissante.
On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $g(v_{4n})=0\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $g(v_{4n+1})=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_{4n})=\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_{4n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n)=l$

Ce qui est impossible car alors $0=1$ ce qui est absurde.

<u>Conclusion</u> : g n'admet pas de limite en 0.