Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI - Semestre 2

DEVOIR SURVEILLÉ 2 - CORRIGÉ

Mai 2020

2019-2020

Durée : 2h

Exercice 1.

1. L'ordre des billets ne comptant pas, il y a $\binom{20}{3} = 1140$ lots de 3 billets tirés parmi 20 possibles.

2. En faisant l'hypothèse d'équiprobabilté, on obtient :
   - $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{2}{2} \times \binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{18}{1140} = \dfrac{3}{190}$.
   - $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{153}{1140} = \dfrac{51}{380}$.
   - $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{153}{1140} = \dfrac{51}{380}$.
   - $\mathbb{P}(D) = \dfrac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{816}{1140} = \dfrac{68}{95}$.

3. $\text{Im}(X) = \{0, 60, 100, 160\}$ et
   - $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(D) = \dfrac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{816}{1140} = \dfrac{68}{95}$.
   - $\mathbb{P}(X = 60) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{153}{1140} = \dfrac{51}{380}$.
   - $\mathbb{P}(X = 100) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{153}{1140} = \dfrac{51}{380}$.
   - $\mathbb{P}(X = 160) = \mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{2}{2} \times \binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{18}{1140} = \dfrac{3}{190}$.

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k \in Im(X)} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 60 \times \mathbb{P}(X = 60) + 100 \times \mathbb{P}(X = 100) + 160 \times \mathbb{P}(X = 160) \\
&= 60 \times \frac{51}{380} + 100 \times \frac{51}{380} + 160 \times \frac{3}{190} \\
&= \frac{3060 + 5100 + 960}{380} \\
&= \frac{9120}{380} \\
&= 24
\end{aligned}$$

5. Si le prix de vente du billet est fixé à $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n} = \dfrac{24}{n}$, pour récupérer les 160euros mis en jeu en vendant les 20 billets, il faut choisir $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\dfrac{24}{n} \times 20 \geqslant 160$ c'est à dire $n \leqslant \dfrac{24 \times 20}{160} = 3$. Ainsi, $n = 3$ convient.

Exercice 2. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $(1 + \sin(x))^x = e^{x \ln(1+\sin(x))}$. De plus, on sait que $x \ln(1 + \sin(x)) \tilde{0}\, x^2$, et $(e^{3x^2} - 1)\tan^2(4x) \tilde{0}\, 3x^2 \times (4x)^2$. On a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{3x^2} - 1)\tan^2(4x)}{x(1 + \sin(x))^x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 \times (4x)^2}{xe^{x^2}} = 0.$$

Exercice 3. On considère les fonctions

$$g :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to]0,1], \quad x \mapsto \cos(x), \qquad h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \varphi :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(\cos(x))$$

1. Comme $g \in \mathscr{C}^3(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ et $h \in \mathscr{C}^3(]-1,+\infty[)$, elles admettent un DL en 0 à l'ordre 3 donné par la formule de Taylor-Young : pour tout x dans un voisinage de 0 :
$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ et } h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. Comme $\varphi \in \mathscr{C}^2(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$, elle admet un DL en 0 à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young : pour tout x dans un voisinage de 0 : $\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. En effet, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}, \varphi'(0) = 0,\ \varphi''(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{-1}{\cos^2(x)} \text{ et } \varphi''(0) = -1.$$

3. $y = 0$ est une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_\varphi$ en 0. La position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_\varphi$ au voisinage de 0 dépend du signe de $-\frac{x^2}{2}$. Comme $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, -\frac{x^2}{2} \leqslant 0$, on en déduit que $\mathscr{C}_\varphi$ est en dessous de y.

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right] = -\frac{1}{2}.$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. $\frac{1}{n}$ est alors bien définie et comme $n^2 \in \mathbb{N}^*$ (puissance entière), on en déduit que u_n est bien définie. Remarquons que l'on peut de plus écrire u_n de la façon suivante : on a $\frac{1}{n} \in]0,1]$ donc $\cos(\frac{1}{n}) \in [\cos(1), 1[\subset]0,1[$, on peut ainsi écrire $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et alors
$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = \exp\left[n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

   (b) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left[n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[n^2 \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right]$.

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{x \to 0^+} \exp\left[\frac{\varphi(x)}{x^2}\right] = \lim_{x \to 0^+} \exp\left[\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}\right] = \lim_{x \to 0^+} \exp\left[-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Exercice 4.

1. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^5(\mathbb{R})$, elle admet un DL en 0 à l'ordre 4 donné par la formule de Taylor-Lagrange : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $\theta_x \in]0 \perp x, x \top 0[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}e^{\theta_x}. \quad (\star)$$

2. En prenant $x = 1$ dans $(\star)$, il existe alors $\theta \in]0,1[$ tel que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}e^{\theta}.$$

3. On pose $\ell = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ et on a comme $0 < e^\theta < e < 3$ (avec θ défini à la question 2.)

$$|e - \ell| = \left|\frac{1}{5!}e^\theta\right| < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}.$$

Exercice 5. • On introduit la fonction $f : x \mapsto x\sin(\pi x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Comme f est continue sur $[0,1]$ alors $f \in \mathscr{R}([0,1])$ et en appliquant la propriété de la moyenne à f sur l'intervalle $[0,1]$ (muni de la subdivision régulière d'ordre n), on en déduit par IPP que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \left[-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$, et alors on introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivante

$$w_n = \ln(v_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\right).$$

Or

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{n}{n}\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

On introduit la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1,+\infty[$. Comme g est continue sur $[0,1]$ alors $g \in \mathscr{R}([0,1])$ et en appliquant la propriété de la moyenne à g sur l'intervalle $[0,1]$ (muni de la subdivision régulière d'ordre n) on obtient par IPP

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)dx = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \ln(2) - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} e^{w_n} = e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}$.

Exercice 6.

1. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi-\varphi)(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)(x_{i+1}-x_i)\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_{i+1})-f(x_i)\big)\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\\ &= \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).\end{aligned}$$

2. Fixons $\epsilon > 0$. Cherchons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) \leqslant \epsilon$. On a

$$\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) \leqslant \epsilon \Leftrightarrow \frac{b-a}{\epsilon}(f(b)-f(a)) \leqslant n$$

En posant $n = E\left[\frac{b-a}{\epsilon}(f(b)-f(a))\right]+1$, on a bien $n \in \mathbb{N}^*$ car f est croissante et donc $f(b)-f(a) \geqslant 0$.

3. D'après ce qui précède, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \text{ et } \int_a^b (\psi-\varphi)(x)dx \leqslant \epsilon, \text{ ce qui prouve que } f \in \mathscr{R}([a,b]).$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les notations précédentes et l'encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on a

$$\begin{aligned}&\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \psi(x)dx\\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)\\ \Leftrightarrow\ & \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right) - \frac{b-a}{n}f(x_n) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right) - \frac{b-a}{n}f(x_n) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant -\frac{b-a}{n}f(x_0) + \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\\ \Leftrightarrow\ & u_n - \frac{b-a}{n}f(b) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant u_n - \frac{b-a}{n}f(a).\end{aligned}$$

On obtient donc $\int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n}f(a) \leqslant u_n \leqslant \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{n}f(b). \quad (\star)$

(b) Par passage à la limite dans $(\star)$, le théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_a^b f(x)dx.$

(c) On vient de prouver la propriété de la moyenne pour une fonction croissante.

5. Si f est décroissante sur $[a,b]$ alors $-f$ est croissante sur $[a,b]$ et donc $-f \in \mathscr{R}([a,b])$ d'après la question 4.. Comme $f = (-1)\times(-f)$ on en déduit que $f \in \mathscr{R}([a,b])$ car -1 est un scalaire.

Exercice 7.

1. $g \in \mathscr{C}^1([0,1])$ donc g' est continue sur $[0,1]$, par suite elle est donc dans $\mathscr{R}([0,1])$. De même, $h : x \mapsto xe^x$ est continue sur $[0,1]$ et donc dans $\mathscr{R}([0,1])$. Comme $f, g', h \in \mathscr{R}([0,1])$, on en déduit que le produit $fg'h \in \mathscr{R}([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[0, \frac{1}{n^2}] \subset [0,1]$ donc $fg'h \in \mathscr{R}([0, \frac{1}{n^2}])$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Comme g' est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème de Weirestrass, elle est bornée sur $[0,1]$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0,1], |g'(x)| \leqslant \alpha$. En particulier, comme $[0, \frac{1}{n^2}] \subset [0,1]$, on aussi $\forall x \in [0, \frac{1}{n^2}], |g'(x)| \leqslant \alpha$. Comme $\forall x \in [0, \frac{1}{n^2}]$, $xe^x f(x) \geqslant 0$, on obtient

$$|u_n| = \left| n \int_0^{\frac{1}{n^2}} g'(x)f(x)xe^x dx \right| \leqslant n \int_0^{\frac{1}{n^2}} \left| g'(x)f(x)xe^x \right| dx = n \int_0^{\frac{1}{n^2}} \underbrace{|g'(x)|}_{\leqslant \alpha} f(x)xe^x dx \leqslant \alpha n \int_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)xe^x dx.$$

De plus, la fonction $h : x \mapsto xe^x$ est continue sur $[0, \frac{1}{n^2}]$ et $f \in \mathscr{R}([0, \frac{1}{n^2}])$ garde un signe constant sur $[0, \frac{1}{n^2}]$. En appliquant le théorème de la moyenne, il existe $c_n \in [0, \frac{1}{n^2}]$ tel que

$$\int_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)h(x)dx = h(c_n) \int_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)dx = c_n e^{c_n} \int_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)dx.$$

En utilisant les inégalités : $0 \leqslant c_n e^{c_n} \leqslant \dfrac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n^2}}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx$, on en déduit que

$$|u_n| \leqslant \alpha \frac{n}{n^2} e^{\frac{1}{n^2}} \int_0^1 f(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$