Introduction à l'analyse

Correction de l'examen final

Exercice 1

1. *Première façon de rédiger :* Étudions la fonction $g : x \to x^2 + 2x + 3$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction polynomiale d'ordre 2 possède un discriminant négatif, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. La fonction g restreinte à $\mathbb{R}^+$ est donc strictement croissante, donc injective. A fortiori, la fonction f est donc injective.

   Deuxième façon de rédiger : On applique la définition de l'injectivité. Soient m et n deux entiers naturels tels que $f(m) = f(n)$. Prouvons alors que $m = n$.

$$\begin{aligned} & f(m) = f(n) \\ \Rightarrow \quad & m^2 + 2m + 3 = n^2 + 2n + 3 \\ \Rightarrow \quad & m^2 + 2m + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ \Rightarrow \quad & (m+1)^2 = (n+1)^2 \\ \Rightarrow \quad & |m+1| = |n+1| \\ \Rightarrow \quad & m + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

   la dernière implication provenant des inégalités : $m + 1 \geqslant 0$ et $n + 1 \geqslant 0$ (car $m, n \in \mathbb{N}$). Ainsi $f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$, ce qui prouve que f est injective.
2. La fonction f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent. En effet, la fonction f est strictement croissante et $f(0) = 3$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant f(0) = 3$. On remarque aussi que 1 et 2 n'ont pas d'antécédent.
3. Pour trouver les antécédents de 18 on recherche les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que : $f(n) = 18$. On est donc conduit à rechercher les solution dans $\mathbb{N}$ de : $n^2 + 2n + 3 = 18$. Cette équation polynômiale possède deux solutions réelles : -5 et 3. La solution recherchée est donc 3. Ainsi $f^{-1}(\{18\}) = \{3\}$.

Exercice 2

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f est définie pour les réels x tels que $\frac{e^{2x}+5}{e^x-2} > 0$. Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + 5 > 0$, la fonction f est définie lorsque $e^x - 2 > 0$ c'est-à-dire :

$$D_f =]\ln(2), +\infty[.$$

2. On détermine les limites de f en $\ln(2)^+$ et en $+\infty$.
   — *Limite en* $\ln(2)$: d'une part $\lim_{x\to\ln(2)^+} e^{2x} + 5 = 9$, d'autre part : $\lim_{x\to\ln(2)^+} e^x - 2 = 0^+$. Donc $\lim_{x\to\ln(2)^+} f(x) = +\infty$.
   — *Limite en* $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(1+5e^{-2x})}{e^x(1-2e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} e^x \frac{1+5e^{-2x}}{1-2e^{-x}} = +\infty$.
3. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'ensemble de dérivabilité de f est $]\ln(2), +\infty[$.
4. Calcul de la dérivée de f.
   — (a) C'est un calcul direct :

$$u'(x) = \frac{(e^x - 2)(2e^{2x}) - e^x(e^{2x} + 5)}{(e^x - 2)^2}$$

$$u'(x) = \frac{e^{3x} - 4e^{2x} - 5e^x}{(e^x - 2)^2}$$

   — (b) f est la composée de la fonction ln et de la fonction u. Ainsi :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x} - 4e^{2x} - 5e^x}{(e^x - 2)(e^{2x} + 5)}$$

5. Etude du signe de $f'(x)$.
   — (a) On développe : $e^x[(e^x+1)(e^x-5)] = e^x[e^{2x} - 4e^x - 5] = e^{3x} - 4e^{2x} - 5e^x$, d'où l'égalité voulue.
   — (b) Puisque la fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, le signe de f' est celui de $\frac{e^x-5}{e^x-2}$. Sur l'ensemble de dérivabilité de f, $e^x - 2 > 0$. Ainsi f est positive ou nulle sur $[\ln(5), +\infty[$ et f est négative ou nulle sur $]\ln(2), \ln(5)]$.
   — (c) f est décroissante sur $]\ln(2), \ln(5)]$ et croissante sur $[\ln(5), +\infty[$. La fonction f atteint son minimum en $\ln(5)$ et celui-ci vaut $\ln(10)$.

x	$\ln(2)$		$\ln(5)$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(10)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

1. On définit deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées continues, par $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Grâce à la formule d'intégration par parties, nous donnons une primitive de la fonction $v'u$:
$$\int v'(x)u(x)dx = v(x)u(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$
En remplaçant par les expressions de u et de v, nous trouvons :
$$\int \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)dx = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \int \frac{2}{1+x^2}dx.$$
Ainsi, la fonction $-\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + 2\arctan(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)$.
2. — (a) Les solutions de l'équations homogène $y'(x) - \frac{2}{x}y(x)$ sont :
$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^{2\ln(x)} = \alpha x^2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
   — (b) Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue. Soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $y(x) = \phi(x)x^2$. Injectons y dans l'équation.
$$\begin{aligned} & y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \ln(1+x^2) \\ \Leftrightarrow \quad & \phi'(x)x^2 + 2x\phi(x) - 2x\phi(x) = \ln(1+x^2) \\ \Leftrightarrow \quad & \phi'(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}. \end{aligned}$$
   Grâce à la question 1. nous pouvons donner une expression pour ϕ et ainsi nous trouvons la solution particulière suivante :
$$y(x) = -x\ln(1+x^2) + 2x^2\arctan(x).$$
   — (c) Les solutions de l'équation (E_1) sont donc :
$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha x^2 - x\ln(1+x^2) + 2x^2\arctan(x) \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4

1. On calcule les racines du polynôme caractéristique : $X^2 + 2X - 3$. Celles-ci sont -3 et 1. Donc les solutions de l'équation homogène sont :
$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-3x} \end{pmatrix} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. On calcule les dérivées successives de y :
$$y'(x) = ke^{-3x} - 3kxe^{-3x}$$
$$y''(x) = -3ke^{-3x} + 9kxe^{-3x} - 3ke^{-3x}$$
Puis on injecte ces expressions dans l'équation : $y'' + 2y' - 3y = -4ke^{-3x} = -7e^{-3x}$, d'où la valeur de k :
$$k = 7/4.$$