# DS3 du 05/01/16

**Exercice 1** (A) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ si $x>0$ et $y \geqslant 0$ alors $\exists n \in \mathbb{N} : nx \geqslant y$

1) Donnons la négation de (A) :

Tout d'abord (A) $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}, \ (x>0 \text{ et } y \geqslant 0) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx \geqslant y$

Donc non (A) $\Leftrightarrow \exists x,y \in \mathbb{R} : x>0$ et $y \geqslant 0$ et non$(\exists n \in \mathbb{N} : nx \geqslant y)$

$\Leftrightarrow \exists x,y \in \mathbb{R} : x>0$ et $y \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, nx < y$

2) (B) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ si $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ x < \frac{1}{n}\right)$ alors $x=0$

La contraposée de (B) est : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, non$(x=0) \Rightarrow$ non$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ x < \frac{1}{n}\right)$

c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant \frac{1}{n}$.

3) Supposons que (A) est vraie et montrons que (B) est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \neq 0$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant \frac{1}{n}$

(On montre que la contraposée de (B) est vraie).

Comme $1 \in \mathbb{R}$ et $1 \geqslant 0$, d'après (A), $\exists n \in \mathbb{N} : nx \geqslant 1$

si $n=0$ alors $0 \geqslant 1$ ce qui est absurde donc $n \in \mathbb{N}^*$

et $nx \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{n}$.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant \frac{1}{n}$

La contraposée de (B) est vraie donc (B) est vraie.

Exercice 2 $\quad f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$

1) f est définie lorsque $2-x-x^2 \geqslant 0$ c'est à dire $x^2+x-2 \leqslant 0$

On étudie le signe de ce polynôme : $\Delta = 1-4\times(-2) = 9 > 0$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

On a $x^2+x-2 \leqslant 0 \iff x \in [-2,1]$ Donc $D_f = [-2,1]$

f est dérivable lorsque $2-x-x^2 > 0$ càd pour $x \in ]-2,1[$.

$\forall x \in ]-2,1[ \quad f'(x) = \dfrac{(2-x-x^2)'}{2\sqrt{2-x-x^2}} = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{2-x-x^2}} = -\dfrac{1+2x}{2\sqrt{2-x-x^2}}$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $-(1+2x)$.

Or $1+2x \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$ On en déduit le Tableau suivant :

| $x$ | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(-2) = 0$

$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$f(1) = 0$

2) L'image directe de $]-1,0[$ par f est notée $f(]-1,0[) = \{f(x), x \in ]-1,0[\}$

On a $f(-1) = \sqrt{2+1-(1)^2} = \sqrt{2}$ et $f(0) = \sqrt{2}$

Entre $-1$ et $-\frac{1}{2}$, f varie entre $f(-1)$ et $f(-\frac{1}{2})$ car elle est croissante

donc $\forall x \in ]-1,-\frac{1}{2}], \quad f(x) \in ]\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$

Entre $-\frac{1}{2}$ et $0$, f varie entre $f(0)$ et $f(-\frac{1}{2})$ car elle est décroissante

donc $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0[, \quad f(x) \in ]\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$.

Finalement, $f(]-1,0[) = ]\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$

L'image réciproque de $[\sqrt{2},+\infty[$ Notée $f^{-1}([\sqrt{2},+\infty[)$ est définie par $f^{-1}([\sqrt{2},+\infty[) = \{x \in D_f : f(x) \in [\sqrt{2},+\infty[\}$.

On cherche donc les $x \in [-2,1]$ tels que $f(x) \geqslant \sqrt{2}$.

D'après le tableau, f est croissante strictement sur $[-2,-\frac{1}{2}]$ et $f([-2,-\frac{1}{2}]) = [0,\frac{3}{2}]$. Comme $\sqrt{2} \in [0,\frac{3}{2}]$ par bijectivité de f sur $[-2,-\frac{1}{2}]$, $\sqrt{2}$ admet un unique antécédent $x_0 = -1$.

De même, sur $[-\frac{1}{2},1]$, $\sqrt{2}$ va admettre un unique antécédent $\tilde{x}_0 = 0$

On a donc les résultats suivants :

$\forall x \in [-2,-\frac{1}{2}]$, $f(x) \geqslant \sqrt{2} \iff x \geqslant -1$

$\forall x \in [-\frac{1}{2},1]$, $f(x) \geqslant \sqrt{2} \iff x \leqslant 0$

On en déduit que $\forall x \in [-2,1]$, $f(x) \geqslant \sqrt{2} \iff x \in [-1,0]$

Donc $f^{-1}([\sqrt{2},+\infty[) = [-1,0]$.

3) On prend $I_1 = [-2,-\frac{1}{2}]$ et $I_2 = [-\frac{1}{2},1]$.

f est injective sur $I_1$ car strictement croissante sur $I_1$ et

_____ $I_2$ _____ décroissante sur $I_2$

On a bien $D_f = I_1 \cup I_2 = [-2,1]$.

## Exercice 3

1) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ est continue lorsque $x+1>0$ càd $x>-1$

Comme $[1,2] \subset ]-1,+\infty[$ f est continue sur $[1,2]$ et donc intégrable.

On a $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx$ avec $u(x) = x+1$

$$= \left[2\sqrt{u(x)}\right]_1^2$$

$$= \sqrt{2+1} - \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ on a $g : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue lorsque $1-x^2>0$

Or $1-x^2>0 \iff x \in ]-1,1[$

Comme $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}] \subset ]-1,1[$, $g$ est continue et donc intégrable sur $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

On pose le changement de variables $x=\sin(t)$ si $x=0$, $t=0$
$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t=\frac{\pi}{4}$

La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue, bijective et dérivable de $[0,\frac{\pi}{4}]$ vers $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ (strictement croissante et à valeurs dans son image)

Ce changement de variables est donc admissible.

Car $t \in [0,\pi/4] \Rightarrow \cos(t) \geq 0$
$\Rightarrow (\cos^2(t))^{1/2} = \cos(t)$

On a $x=\sin(t)$ donc $dx = \cos(t)\,dt$

et $1-x^2 = 1-\sin^2(t) = \cos^2(t)$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)\,dt}{(\cos^2(t))^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\cos^3(t)}\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt$

$$= [\tan(t)]_0^{\pi/4} = \tan(\tfrac{\pi}{4}) - \tan(0) = \boxed{1}$$

3) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x)\,dx$ On a $h : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ est continue lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $[1,4] \subset \mathbb{R}_+^*$ $h$ est continue et intégrable sur $[1,4]$.

Calculons cette intégrale par IPP : On pose $u(x)=\ln(x)$ $u'(x)=\frac{1}{x}$
$v'(x)=\sqrt{x}$ $v(x)=?$

On a $v'(x) = x^{1/2}$ donc $v(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$

Les fonctions $u, u', v$ et $v'$ sont continues sur $[1,4]$ donc

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3}x^{3/2} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}4^{3/2}\ln(4) - \int_1^4 \frac{2}{3}x^{3/2-1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(2)^3\ln(4) - \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x)\,dx = \frac{2}{3}\times 2^3\times 2\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\,x^{1+\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{32}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \frac{32}{3}\ln(2) - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times 2^3 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\left[8\ln(2) - 8 + 1\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[8\ln(2) - 7\right]$$

## Exercice 4

1) $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet pour primitive $A(x) = x^2 - \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

2) L'équation homogène $y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y(x) = 0$ s'écrit $y'(x) - a(x)y(x) = 0$ et admet pour solutions des fonctions de la forme

$$f_h(x) = Ce^{A(x)} = Ce^{x^2 - \ln(x)} = \frac{C}{x}e^{x^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

3) On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(x) = \varphi(x)\,\frac{e^{x^2}}{x}$

On a $f_p'(x) = \varphi'(x)\times\frac{e^{x^2}}{x} + \varphi(x)\left[\frac{2x}{x}e^{x^2} - \frac{1}{x^2}e^{x^2}\right]$

$$= \varphi'(x)\times\frac{e^{x^2}}{x} + \varphi(x)e^{x^2}\left[2 - \frac{1}{x^2}\right]$$

On a $f_p'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)f_p(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x)\frac{e^{x^2}}{x} + \varphi(x)e^{x^2}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)\varphi(x)\frac{e^{x^2}}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x)\frac{e^{x^2}}{x} + \underbrace{\varphi(x)e^{x^2}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) - \varphi(x)e^{x^2}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}_{=0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x)\frac{e^{x^2}}{x} = 1$$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ On cherche une primitive de $\frac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2} = -\frac{1}{2} \times -2xe^{-x^2}$

On prend $\varphi(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

Finalement, $\boxed{f_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \times \frac{e^{x^2}}{x} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \times \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{-1}{2x}}$

4) Les solutions de l'équation sont de la forme $f(x) = f_p(x) + f_h(x) \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

c'est à dire $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{x} e^{x^2} = \frac{1}{x}\left(Ce^{x^2} - \frac{1}{2}\right), \ C \in \mathbb{R}}$

<u>Exercice 5</u> $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1 \quad (*)$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation $(**)$ suivante

$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ et $P_c(z) = z^2 + z + 1$

$\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3$

$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Les solutions de $(**)$ sont de la forme $\boxed{f_h(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$

Cherchons une solution particulière de $(*)$ sous forme d'un polynôme du même degré que le second membre $g(x) = x^2 + x + 1$.

On pose $f_p(x) = ax^2 + bx + c$

$f_p'(x) = 2ax + b$

$f_p''(x) = 2a$

et $f_p$ solution de $(*)$ $\Leftrightarrow$ $2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad ax^2 + x(2a+b) + (2a+b+c) = x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ 2a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $f_p(x) = x^2 - x$ et les solutions de $(*)$ sont de la forme $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = f_p(x) + f_h(x) = x^2 - x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.}$$