Corrigé seconde session du mois de juin 2018

Exercice A On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \arctan(x) + 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. (a) $x \mapsto \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0[$, $x \mapsto \arccos(x)$ est continue sur $[-1, 1]$ donc sur $]0, 1[$ et $x \mapsto \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $]1, +\infty[$. En conclusion, g est donc continue sur $\mathcal{D}$.

   (b) On a $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{\pi}{2} = g(0)$, g est donc continue en 0. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \arccos(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0 = g(1)$, g est donc continue en 1.

2. (a) $x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0[$, $x \mapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ donc sur $]0, 1[$ et $x \mapsto \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $]1, +\infty[$. En conclusion, g est donc dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x^2+4x+8}{(x+1)^2} & \text{si } \quad x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

   (b) On a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\arctan(x)}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0} = -\arctan'(0) = -\frac{1}{1+0^2} = -1.$$

   De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(x)-\arccos(0)}{x-0} = -\arccos'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = -1.$$

   Comme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0},$$

   on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$, g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = -1$.

   (c) En utilisant la règle de l'Hospital on a

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1} = -\infty.$$

   La limite en 1^- du taux d'accroissement n'étant pas finie, on en déduit que g n'est pas dérivable en 1.

Exercice B :

1. $f(x)$ et $g(x)$ sont définies lorsque x est dans le domaine de définition de la fonction arccosinus c'est à dire $x \in [-1,1]$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = [-1,1]$.

2.

$$\begin{aligned}
f(0) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(0)\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2},\\
f(1) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(1)\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\times 0\right) = 1,\\
f(-1) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(-1)\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\times \pi\right) = 0.
\end{aligned}$$

3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

   On a obtient donc

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \text{ et } \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

4. $\forall x \in [-1,1]$, en utilisant la relation $\cos(\arccos(x)) = x$ on obtient

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\times\frac{1}{2}\arccos(x)\right)+1\right) = \frac{1}{2}(x+1).$$

   De même,

$$g(x) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\times\frac{1}{2}\arccos(x)\right)\right) = \frac{1}{2}(1-x).$$

Exercice C Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\\
&= \frac{(x+1)^2-(x^2+x+1)}{x(x+1+\sqrt{x^2+x+1})}\\
&= \frac{x^2+2x+1-(x^2+x+1)}{x(x+1+\sqrt{x^2+x+1})}\\
&= \frac{x}{x(x+1+\sqrt{x^2+x+1})}\\
&= \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}\\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Comme f admet une limite finie en 0 on en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement que l'on note $\tilde{f}$ est défini de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Exercice D

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{1}\right] = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}-2\right] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx = \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \left[\ln(|x^2+2x+2|) + \arctan(x+1)\right]_{-1}^{0} \\ &= \ln(2) + \arctan(1) - \ln(1) - \arctan(0) = \ln(2) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice E

1. Pour tout t dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, en effectuant la division euclidienne de $4t^2+7t+1$ par $t+2$, on a

$$R(t) = \frac{4t^2+7t+1}{t+2} = \frac{(t+2)(4t-1)+3}{t+2} = 4t - 1 + \frac{3}{t+2}.$$

Une primitive de R sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est donc $t \mapsto 2t^2 - t + 3\ln(|t+2|)$.

2. L'application $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans son image $]0,+\infty[$ elle est donc bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$.

3. Pour tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $t = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = t^2$, $dx = 2tdt$ et alors une primitive de f sur $]0,+\infty[$ est donnée par

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int \frac{4x+7\sqrt{x}+1}{2x+4\sqrt{x}}dx = \int \frac{4t^2+7t+1}{2t^2+4t}2tdt \\ &= \int \frac{4t^2+7t+1}{t+2}dt = \int R(t)dt = 2t^2 - t + 3\ln(|t+2|) \\ &= 2x - \sqrt{x} + 3\ln(|\sqrt{x}+2|) = 2x - \sqrt{x} + 3\ln(\sqrt{x}+2). \end{aligned}$$

4. Pour tout x dans $]0,+\infty[$, (E) s'écrit : $y'(x) - f(x)y(x) = 0$. Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc de la forme $y(x) = Ce^{F(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante, ce qui donne

$$y(x) = C\exp\left(2x - \sqrt{x} + \ln\left[(\sqrt{x}+2)^3\right]\right) = C(\sqrt{x}+2)^3\exp(2x-\sqrt{x}).$$

Exercice F

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -7e^{-3x}. \quad (\tilde{E})$$

1. L'équation homogène associée à $(\tilde{E})$ s'écrit

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$$

et son polynôme caractéristique associé P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 2x - 3$ admet pour racines -3 et 1. Les solutions de l'équation homogènes associées à $(\tilde{E})$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme $f_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ deux constantes.

2. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f_p : x \mapsto kxe^{-3x}$. On a

$$f_p'(x) = e^{-3x}(k - 3kx) \text{ et } f_p''(x) = e^{-3x}(9kx - 6k).$$

De cette façon,

$$\begin{aligned} f_p''(x) + 2f_p'(x) - 3f_p(x) = -7e^{-3x} &\Leftrightarrow 9kx - 6k + 2(k - 3kx) - 3kx = -7 \\ &\Leftrightarrow -4k = -7 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

On obtient alors $f_p(x) = \frac{7}{4}xe^{-3x}$ comme solution particulière de $(\tilde{E})$.

3. Les solutions de $(\tilde{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = Ae^{-3x} + Be^{x} + \frac{7}{4}xe^{-3x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$