

Master Mécanique  
Parcours Aéronautique et Transport

**Aéro-Vibroacoustique**

Pierre-Olivier Mattei

Centre National de la Recherche Scientifique  
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique  
28 janvier 2020



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rayonnement acoustique</b>	<b>3</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	3
1.1.1	Un exemple simple . . . . .	3
1.1.2	Régime harmonique . . . . .	4
1.2	Noyau de Green . . . . .	5
1.3	Rayonnement acoustique de sources ponctuelles . . . . .	6
1.4	Rayonnement de sources réparties . . . . .	9
1.4.1	Potentiels de couches . . . . .	9
1.4.2	Représentation de Green de la pression, introduction à la théorie de la diffraction . . . . .	10
1.5	Rayonnement acoustique d'un piston dans un plan . . . . .	14
1.5.1	Rayonnement en champ lointain du piston circulaire - Directivité . . . . .	17
1.5.2	Rayonnement dans l'axe du piston circulaire . . . . .	18
1.6	Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire bafflée . . . . .	20
1.7	Rayonnement acoustique de sources en mouvement . . . . .	24
1.7.1	Sources compactes et non compactes . . . . .	24
1.7.2	Sources en mouvement uniforme et non uniforme . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Vibrations de plaques minces</b>	<b>31</b>
2.1	équations de base du modèle de plaque de Kirchhoff . . . . .	31
2.1.1	Solution générale . . . . .	33
2.1.2	Noyau de Green . . . . .	35
2.2	Vitesse de propagation des ondes mécaniques . . . . .	36
2.3	Plaque finie . . . . .	39
2.3.1	Plaque rectangulaire à bord appuyés . . . . .	39
2.3.2	Plaque circulaire encastrée . . . . .	43
2.3.3	Plaque circulaire libre . . . . .	46
2.3.4	Plaque circulaire appuyée . . . . .	48
2.4	Plaque finie quelconque . . . . .	49
2.4.1	Formule de Green . . . . .	49
2.4.2	Représentation de Green du déplacement de la plaque . . . . .	50
2.4.3	Équations intégrales de frontière . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Premières notions de Vibroacoustique</b>	<b>53</b>
3.1	Un exemple simple . . . . .	53
3.1.1	Équations du mouvement . . . . .	54
3.1.2	Régime harmonique . . . . .	54
3.2	Rayonnement acoustique . . . . .	55
3.3	Approximation "fluide léger" . . . . .	57
3.4	Transmission du son . . . . .	60
3.5	Régime transitoire . . . . .	66

<b>4</b>	<b>Rayonnement acoustique de plaques minces</b>	<b>71</b>
4.1	Ondes libres dans une plaque indéfinie immergée dans un fluide . . . . .	71
4.1.1	Racines de l'équation de dispersion . . . . .	73
4.1.2	Approximation fluide léger . . . . .	74
4.2	transmission d'une onde plane par une plaque mince . . . . .	76
4.3	Rayonnement d'une plaque indéfinie sous excitation ponctuelle . . . . .	79
4.3.1	Équation intégro-différentielle en $u$ . . . . .	80
4.3.2	Transformée de Fourier de $u$ . . . . .	80
4.3.3	Calcul de $u(r)$ . . . . .	81
4.3.4	Pression acoustique rayonnée . . . . .	82
4.4	Vibration et rayonnement acoustique de plaques finies . . . . .	84
4.4.1	Énoncé du problème . . . . .	84
4.4.2	Méthodes "exactes" . . . . .	85
4.4.3	Approximation fluide léger . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Couplage aéroélastique</b>	<b>95</b>
5.1	Vibrations d'une plaque mince excitée par un écoulement turbulent . . . . .	95
5.1.1	Densité interspectrale : modèle de Corcos . . . . .	96
5.1.2	Représentation de Green de la plaque couplée . . . . .	96
5.1.3	Exemple d'une plaque rectangulaire appuyée . . . . .	97
5.2	Structures élancées dans un écoulement . . . . .	99
5.2.1	Bruit créé par l'écoulement tourbillonnaire autour d'un cylindre . . . . .	99
5.2.2	Ballotement . . . . .	101
5.3	Instabilité convective . . . . .	103
5.4	Instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Introduction à la théorie des fonctions de Bessel</b>	<b>107</b>
6.1	Définitions. Premières propriétés . . . . .	107
6.2	Comportements asymptotiques . . . . .	110
6.3	Équations différentielles . . . . .	111
6.4	Formules de récurrence . . . . .	112
6.4.1	Relations d'orthogonalité des fonctions $J_\nu(x)$ . . . . .	112
6.5	Fonctions de Bessel modifiées . . . . .	112
6.6	Représentations intégrales . . . . .	113

Ce cours traite du rayonnement acoustique, de la vibroacoustique (ou interaction fluide structure vibrante) ainsi que de aéro-vibroacoustique (interaction entre une structure vibrante et un fluide en écoulement). Du fait de la brièveté du cours, celui-ci ne peut être qu'une simple introduction à ce domaine, très actif, de l'Acoustique.

On rassemble sous le vocable vibroacoustique une très large classe de problèmes qui vont de la qualité de l'isolation acoustique des vitrages, aux bruits et vibrations induits par des écoulements au contact de structures vibrantes, au contrôle vibratoire du bruit rayonné par une structure, à l'holographie acoustique ou encore la qualité des instruments de musique. Tous ces phénomènes ne sont que des aspects différents des effets de l'interaction entre une structure vibrante et le fluide qui l'entoure. Relier quantitativement l'état vibratoire d'un solide élastique au niveau de pression dans le fluide qui l'entoure est extrêmement difficile, même dans le cas d'objets aussi simple que les plaques minces. Pour traiter ces problèmes, il existe (schématiquement) deux classes de techniques numériques. Une première catégorie utilise des méthodes "lourdes" comme les éléments finis de volume, couplés avec des éléments finis de frontière, qui permettent de décrire le comportement de structures complexes. Ces outils nécessitent généralement des moyens informatiques importants. Ils se prêtent mal aux études paramétriques. La deuxième catégorie de codes, limitée à des structures plus simples (géométriquement et mécaniquement), fait usage de résultats analytiques (développements modaux, fonctions spéciales, méthodes de perturbation) et permet des études paramétriques.

Le premier chapitre est une introduction au rayonnement acoustique des sources simples ; il est en particulier introduit les notions de sources ponctuelles et surfaciques qui permettent d'établir facilement la représentation de Green de la pression. Le second chapitre présente une introduction à la théorie des vibrations des plaques minces de dimensions finies. Le troisième présente les premières notions de vibroacoustique ; sur un exemple simple, nous présentons l'essentiel des phénomènes mis en présence. Le quatrième chapitre traite d'une façon qui se veut exhaustive le problème de la plaque plane couplée. Cet exemple quoique très académique permet de présenter presque toutes les méthodes de résolution des problèmes de vibroacoustique (développements modaux, équations intégrales de frontière, méthodes de perturbation). Le cinquième chapitre présente les bases du couplage entre une structure vibrante et un écoulement. Enfin le dernier chapitre présente une introduction aux fonctions de Bessel.

Tout au long de ce cours, on trouvera des exercices qui complètent le cours ou qui en sont une application directe. La solution des exercices, notée en lettres italiques, est détaillée ou du moins les grandes lignes sont présentées.



# Chapitre 1

## Rayonnement acoustique

Nous présentons ici les premières notions du rayonnement acoustique. Nous commencerons par définir le rayonnement acoustique de sources ponctuelles puis nous généralisons ces notions au rayonnement de sources réparties à l'aide d'intégrales de surface (les potentiels de couche). Puis nous arrivons à la représentation de Green de la pression ce qui permet d'introduire la notion de diffraction. Nous introduisons, à l'aide de l'exemple simple du piston circulaire bafflé, la notion de directivité puis nous terminerons sur quelques exemples de rayonnement de structures rectangulaires élémentaires.

### 1.1 Présentation du problème

#### 1.1.1 Un exemple simple

Rappelons que l'équation de d'Alembert qui régit la propagation des ondes en coordonnées sphériques dans un milieu homogène et isotrope

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

a pour solution une combinaison linéaire d'ondes sortante ( $F$ ) et rentrante ( $G$ ) :

$$p(r, t) = (F(r - ct) + G(r + ct)) / r.$$

Considérons l'exemple une sphère de rayon  $R$  qui se dilate et se contracte uniformément avec une vitesse radiale  $V(t)$ . Le débit sortant de la surface est  $Q(t) = 4\pi R^2 V(t)$ . Calculons la pression que rayonne cette sphère. On part de la loi fondamentale de la dynamique  $\rho_0 \partial V(t) / \partial t = -\partial p(r, t) / \partial r$ , dans laquelle la pression  $p(r, t)$  n'est composée que d'une onde sortante  $p(r, t) = P(r - ct) / r$ . On a  $\partial p(r, t) / \partial r = \partial(P(r - ct) / r) / \partial r = 1/r \partial P(r - ct) / \partial r - 1/r^2 P(r - ct)$ . Soit en  $r = R$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{P}{R^2} = -\frac{\rho_0}{4\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Si la sphère est petite, si  $R$  petit devant la longueur d'onde (ce qui correspond à une source compacte ou/et une grande longueur d'onde<sup>1</sup>), on peut supposer que  $P/R \gg \partial P / \partial r$  en  $r = R$ . Alors  $P \approx \rho_0 / 4\pi dQ(t) / dt$  en  $r = R$ . La pression rayonnée est alors

$$p(r, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} Q'(\tau_r), \tau_r = t - r/c$$

$\tau_r$  a la dimension d'un temps et caractérise le temps que met le signal pour se propager de la source au récepteur. On le nomme temps de retard. La pression rayonnée par la sphère pulsante ne dépend

---

1. Une grande longueur d'onde :  $\lambda = c/f$  correspond à une fréquence  $f$  basse, c'est-à-dire une variation temporelle lente.

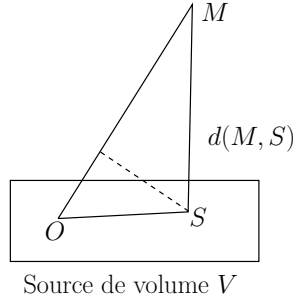


FIGURE 1.1 – Approximation de Fraunhofer : géométrie et notation

que de la distance à l'origine. On parle alors de rayonnement monopolaire. On note de plus que si le débit est constant (si la vitesse radiale de la sphère dans le cas présent est invariable) alors la pression acoustique est nulle.

Si le débit varie brutalement, par exemple passant de 0 pour  $t < 0$  à 1 pour  $t > 0$ , alors le débit  $q(t) = H(t)$  est un échelon de Heaviside et il est évident que  $dH(t)/dt = \delta(t)$ . L'onde créée sera une impulsion modélisée par une distribution de Dirac  $(\rho_0/4\pi r) \delta(t - r/c_0)$ . On peut d'ores et déjà préciser que la fonction ainsi obtenue représente le noyau de Green de l'équation de d'Alembert. Soit la fonction  $G(M, t; S, \tau)$ , solution de  $1/c_0^2 \partial^2 G / \partial t^2 - \Delta G = \delta(M - S) \delta(t - \tau)$ . On a  $G(M, t; S, \tau) = 1/(4\pi r) \delta(t - \tau - r/c_0)$ , où  $r = d(M, S)$  est la distance entre  $M$  et  $S$  (voir figure 1.1).  $G$  représente une impulsion sphérique qui arrive à l'observateur au temps  $t = \tau + r/c_0$  et qui décroît en  $1/r$ . La solution de l'équation des ondes pour une source  $Q(S, t)$  quelconque est donnée par :

$$p(M, t) = G * Q = \frac{1}{4\pi} \int_{V(S)} \int_{\tau} Q(S, \tau) \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_0}\right) \frac{dS}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r}{c_0}\right) \frac{dS}{r}.$$

Établissons maintenant une approximation de la pression en champ lointain (approximation de Fraunhofer). On pose  $r_m = d(M, O)$ ,  $r_s = d(S, O)$ ,  $\vec{M}$  le vecteur  $\vec{OM}$  et  $\vec{S}$  le vecteur  $\vec{OS}$ .

Si le point de réception est suffisamment éloigné de la surface rayonnante, on a  $r^2 = r_M^2 - 2\vec{M} \cdot \vec{S} + r_S^2$ , soit avec  $r_s = r_M \vec{M} \cdot \vec{S}$   $r^2 = r_M^2 (1 - 2r_S/r_M + r_S^2/r_M^2)$ . Ainsi  $r \approx r_M - r_S + \mathcal{O}(r_S^2/r_M^2)$ . D'où l'approximation en champ lointain connue sous le nom d'approximation de Fraunhofer :

$$p(M, t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r_M}{c_0} + \frac{r_S}{c_0}\right) dS.$$

### 1.1.2 Régime harmonique

Une source sonore  $f(M)$ , de dépendance temporelle  $\exp(-i\omega t)$ , rayonne en espace indéfini  $\Omega$  une pression  $p(M)$  qui est solution de l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)p(M) = f(M)$$

à cette équation, il faut ajouter les éventuelles conditions aux limites si le domaine de propagation comporte des obstacles. On nomme  $\Sigma$  la frontière de  $\Omega$ . On suppose que cette frontière peut être caractérisée par une impédance spécifique  $\zeta$ . En tout point de la frontière  $\Sigma$ , le rapport entre la pression acoustique et la composante normale de la vitesse acoustique est connu. Cela est traduit par la condition aux limites  $\partial_{\vec{n}} p(S) + ik/\zeta p(S) = 0$ ,  $S \in \Sigma$ , où  $\partial_{\vec{n}}$  est la dérivée suivant le vecteur normal. Rappelons que si l'obstacle est passif (il renvoie moins d'énergie qu'il en reçoit, éventuellement autant),



la partie réelle de  $\zeta$  est positive ou nulle. Notons encore que cette condition permet de définir aisément la condition de Neumann si  $\zeta = \infty$  ou de Dirichlet si  $\zeta = 0$ .

Si le domaine de propagation est non borné, le problème constitué de l'équation de Helmholtz et de la condition d'impédance ne possède pas de solution unique. On doit lui adjoindre une condition de conservation de l'énergie. Cette dernière peut être donnée par les conditions de Sommerfeld qui caractérisent le fait qu'il n'y a aucune énergie qui provient de l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} p(r) &= \mathcal{O}(r^{-(n-1)/2}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p(r)}{\partial r} - ikp(r) \right) &= o(r^{-(n-1)/2}) \end{aligned}$$

où  $r$  est la distance de  $M$  à l'origine et  $n$  la dimension de l'espace<sup>2</sup>. Si la dépendance temporelle était du type  $\exp(+i\omega t)$ , la seconde condition s'écrirait  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p(r)}{\partial r} + ikp(r) \right) = o(r^{-(n-1)/2})$ .

Une autre manière de satisfaire ce principe consiste à considérer non plus le milieu comme non dissipatif (qui est une vue de l'esprit qui facilite la résolution de bien des problèmes) mais comme la limite d'un milieu faiblement absorbant. Dans un milieu comme celui-ci, on peut considérer que le nombre d'onde  $k$  est en réalité un complexe  $k_\epsilon = k + i\epsilon$  de partie imaginaire faiblement positive. Il convient alors de chercher la solution  $p_\epsilon$ , solution bornée de

$$(\Delta + k_\epsilon^2)p_\epsilon(M) = f(M)$$

satisfaisant la condition aux limites d'impédance. La solution qui a un sens physique est la limite de  $p_\epsilon$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ce principe est le principe d'absorption limite. Il est strictement équivalent aux conditions de Sommerfeld. Ces deux principes définissent la même solution qui satisfait la conservation de l'énergie.

## 1.2 Noyau de Green

Une technique particulièrement efficace pour calculer  $p(M)$  est basée sur la notion de noyau de Green. Par définition un noyau de Green  $G(M,S)$  est un noyau élémentaire qui vérifie les conditions de Sommerfeld. Une solution élémentaire est une solution d'une équation différentielle dont le second membre est la distribution de Dirac :  $(\Delta + k^2)\phi(M) = \delta(M)$ . Un noyau élémentaire est une fonction de deux variables solution du problème  $(\Delta_M + k^2)\psi(M,S) = \delta_S(M)$  qui satisfait les conditions de Sommerfeld,  $\delta_S(M)$  est la distribution de Dirac située en  $S$  et  $\Delta_M$  signifie que le Laplacien est appliqué à la variable  $M$ .

Remarques :

- alors que le noyau élémentaire n'est pas unique (il est défini à une solution du problème homogène près), le noyau de Green est unique.
- On a, si  $d(M,S)$  est la distance Euclidienne entre  $M$  et  $S$ , les résultats suivants :

$$\begin{aligned} G(M,S) &= \frac{e^{ikd(M,S)}}{2ik} \text{ dans } \mathbb{R} \\ G(M,S) &= -\frac{i}{4} H_0^1(kd(M,S)) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ G(M,S) &= -\frac{e^{ikd(M,S)}}{4\pi d(M,S)} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$H_0^1(x)$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0. On peut vérifier ces résultats par exemple sur le cas 1-D.

---

2. Rappelons que la notation de Landau  $f(x) = \mathcal{O}(x^\alpha)$  pour  $x \rightarrow \infty$  se lit  $f(x)$  se comporte comme  $x^\alpha$  pour  $x \rightarrow \infty$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^\alpha = \text{cte}$ .  $f(x) = o(x^\alpha)$  se lit  $f(x)$  décroît plus vite que  $x^\alpha$  pour  $x \rightarrow \infty$  soit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^\alpha = 0$ .

**EXERCICE.** Le faire.

**SOLUTION.** On a si  $M$  est situé en  $x$  et  $S$  en  $x'$  :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikd(M,S)}}{2ik} &= \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik}, \text{ donc} \\ \frac{d}{dx} \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik} &= ik \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik} \text{sgn}(x-x') \\ \frac{d^2}{dx^2} \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik} &= -k^2 \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik} + \delta_{x'}(x) \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) \frac{e^{ik|x-x'|}}{2ik} &= \delta_{x'}(x) \text{ cqfd} \end{aligned}$$

On remarque que  $G(M, S) = G(S, M)$ . Cette relation qui porte le nom de principe de réciprocité stipule en Acoustique que si on intervertit la source et la mesure, les résultats restent inchangés. Physiquement,  $G(M, S)$  décrit le rayonnement mesuré en  $M$  en espace indéfini d'une source physique de petite dimension qui émet la même énergie dans toutes les directions de l'espace. En effet, reprenons notre exemple simple de début de chapitre la pression rayonnée par une source de débit de petite taille est donnée par

$$p(r, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} Q'_m(\tau_r), \tau_r = t - r/c$$

Si le débit de masse  $Q_m(t) = Q_m \exp(-i\omega t)$  alors, on a

$$\begin{aligned} p(r, t) &= \frac{-i\omega\rho_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t-r/c)} \\ &= -i\omega\rho_0 Q_m \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\omega t} \\ &= -ik\rho_0 c Q_m \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

On retrouve évidemment l'expression de la fonction de Green dans l'espace à trois dimensions.

Pour calculer la solution du problème initial  $(\Delta + k^2)p(M) = f(M)$ , il suffit de calculer  $p(M) = \int_{\Sigma} G(M, S)f(S)dS$ , si  $\Sigma$  est le support de la source, qui n'est autre que le produit de convolution spatial ente la distribution source et le noyau de Green. En effet, on a  $G * f = G * [(\Delta + k^2)p] = p * [(\Delta + k^2)G] = p * \delta = p$ .

### 1.3 Rayonnement acoustique de sources ponctuelles

Comme nous l'avons vu, une source de très petite dimension par rapport à la longueur d'onde qui émet de l'énergie dans toutes les directions de l'espace de manière uniforme présente un rayonnement omnidirectionnel. Elle est décrite par la fonction de Green  $G(M, S)$ . Elle est appelée monopôle.

L'expérience montre que peu de sources présentent un rayonnement monopolaire. On est amené à envisager le rayonnement de sources ponctuelles plus complexes. Considérons par exemple le système formé de deux monopôles. L'un est situé en  $S^+(x = \epsilon, y = 0, z = 0)$  et l'autre en  $S^-(x = -\epsilon, y = 0, z = 0)$ . Le premier a une amplitude de  $-1/2\epsilon$  et le second de  $1/2\epsilon$ . En pratique cela correspond à deux sources identiques en opposition de phase ( $-1 = e^{i\pi}$ ). Le champ de pression créé par ces deux sources est la solution de

$$(\Delta + k^2)p_{\epsilon}(M) = -\frac{1}{2\epsilon} (\delta_{S^+}(M) - \delta_{S^-}(M)).$$

Il est alors évident de voir que l'on a  $p_{\epsilon}(M) = -\frac{1}{2\epsilon} (G(M, S^+) - G(M, S^-))$ . Soit encore

$$p_{\epsilon}(M) = \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{e^{ikr^+}}{4\pi r^+} - \frac{e^{ikr^-}}{4\pi r^-} \right)$$

avec  $r^\pm = \sqrt{(x \mp \epsilon)^2 + y^2 + z^2}$ . On montre par passage à limite  $\epsilon \rightarrow 0$  que l'on obtient

$$p(M) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right).$$

**EXERCICE.** Le faire.

**SOLUTION.** Si  $\epsilon$  est petit, on peut faire un développement en série de perturbation par rapport à  $\epsilon$ . On a, avec  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  :

$$\begin{aligned} r^{\pm 2} &= x^2 \mp 2x\epsilon + \epsilon^2 + y^2 + z^2 \\ &= r^2 \mp 2x\epsilon + \epsilon^2 \\ &\approx r^2 \mp 2x\epsilon \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\begin{aligned} r^\pm &\approx r \sqrt{1 \mp 2\epsilon \frac{x}{r^2}} \\ &\approx r \left( 1 \mp \epsilon \frac{x}{r^2} \right) = r \mp \epsilon \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{e^{ikr^\pm}}{4\pi r^\pm} \approx \frac{e^{ik(r \mp \epsilon \frac{x}{r})}}{4\pi r (1 \mp \epsilon \frac{x}{r^2})} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{e^{\mp ik\epsilon \frac{x}{r}}}{1 \mp \epsilon \frac{x}{r^2}}.$$

En développant  $e^\epsilon = 1 + \epsilon$  et  $1/(1 + \epsilon) = 1 - \epsilon$ , on obtient

$$\frac{e^{ikr^\pm}}{4\pi r^\pm} \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( 1 \mp ik\epsilon \frac{x}{r} \right) \left( 1 \pm \epsilon \frac{x}{r^2} \right) \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( 1 \mp \epsilon \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} p_\epsilon(M) &= \frac{1}{2\epsilon} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( \left( 1 - \epsilon \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} \right) - \left( 1 + \epsilon \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Soit, par passage à limite  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$p(M) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{x}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right).$$

Ce rayonnement est appelé le rayonnement dipolaire. La source correspondante, le dipôle, ici orienté suivant l'axe des  $x$  est représentée par la dérivée par rapport à  $x$  de la distribution de Dirac. En effet, on a :

$$(\Delta_M + k^2) \frac{\partial}{\partial x} (G(M, S)) = \frac{\partial}{\partial x} ((\Delta_M + k^2)G(M, S)) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta_S(M)),$$

car au sens des distributions, on peut intervertir les dérivations. Plus généralement, soit  $S$  l'emplacement d'un dipôle et  $\bar{n}$  le vecteur unitaire qui définit son orientation, alors, il rayonne dans tout l'espace une pression  $p(M) = \bar{n} \cdot \bar{\nabla} G(M, S)$ .

Le module de la pression rayonné par un dipôle est donné par  $|p(M)| = |x|/(4\pi r^2)\sqrt{k^2 - 1/r^2}$ , pour un dipôle orienté suivant l'axe  $x$ . Pour  $r$  fixé, la pression est maximale suivant l'axe  $x$  et nulle dans le plan  $x = 0$  (voir figure 1.2). On dit qu'une telle source présente deux lobes de directivité. Ce type de rayonnement dipolaire est celui qui peut être observé sur haut-parleur seul (non enchâssé dans une enceinte) ou sur une plaque plane qui vibre (c'est l'analogie en Mécanique des Fluides potentielle du doublet source/puits). Lorsque la source dipolaire n'est plus ponctuelle, par exemple pour deux sources de débit  $\rho_0 q_m$  distantes de  $\ell$ , la pression acoustique dépend du moment dipolaire  $q_m \ell$ . Soit  $\phi$ , l'angle formé par l'axe du dipôle et un point de l'espace, on a en champ lointain

$$p(M, t) \approx -ik^2 \rho_0 c_0 e^{-i\omega t} q_m \ell \cos \phi \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

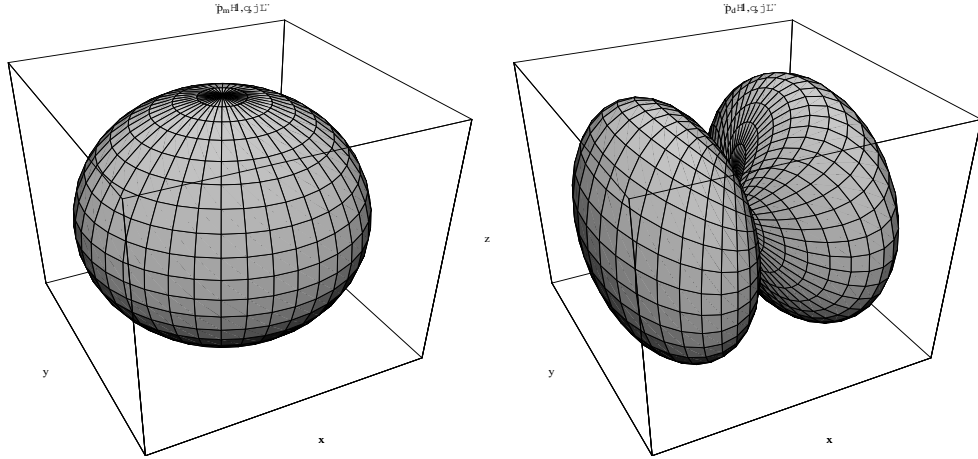


FIGURE 1.2 – Pressions rayonnées par un monopôle (gauche) de directivité  $\Xi \sim 1$  et un dipôle orienté suivant l'axe  $x$  (droite) de directivité  $\Xi \sim \cos^2 \phi$

Un autre type de rayonnement acoustique très important dans lorsque l'on s'intéresse au rayonnement acoustique de la turbulence est celui du quadripôle. On a  $\Delta p + k^2 p = \partial^2 \delta(M) / \partial x_i \partial x_j$ , dont la solution s'obtient par dérivation de la fonction de Green dans les directions de l'espace considérées :  $\partial^2 G / \partial x_i \partial x_j$ . La pression acoustique rayonnée dépend alors fortement du type de quadripôle. Le quadripôle longitudinal est obtenu pour  $x_i = x_j$  et correspond à deux dipôles placés côte à côte, tandis que le quadripôle latéral est obtenu pour  $x_i \neq x_j$  et correspond à deux dipôles superposés. On a

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[ x_i x_j \frac{k^2}{r^2} + \frac{ik}{r^3} \left( 3x_i x_j - r^2 \delta_i^j \right) - \frac{1}{r^4} \left( 3x_i x_j - r^2 \delta_i^j \right) \right], \quad \begin{array}{l} x_i = x = r \sin \theta \cos \phi \\ x_j = y = r \sin \theta \sin \phi \end{array}$$

En pratique les sources rencontrées en physique présentent des diagrammes de directivité plus complexes. Le nombre de lobes (chacun de ces lobes correspond à une direction dans laquelle l'énergie rayonnée est importante) peut être élevé. On doit alors faire appel à la notion de source multipolaire. Une telle source correspond à une combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac.

$$f(M) = \sum_{m,n,q} A_{mnq} \frac{\partial^{m+n+q} \delta(M)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^q},$$

chaque terme rayonne une pression donnée par

$$p_{mnq}(M) = A_{mnq} \frac{\partial^{m+n+q}}{\partial x^m \partial y^n \partial z^q} \left( -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right).$$

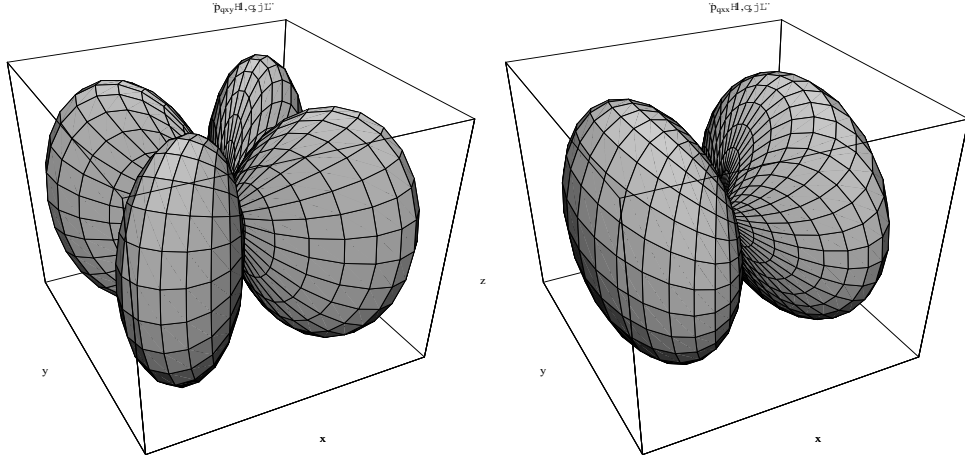


FIGURE 1.3 – Pressions rayonnées en champ lointain par un quadripôle latéral de directivité  $\Xi \sim \cos^2 \phi \sin^2 \phi$  ou longitudinal de directivité  $\Xi \sim \cos^4 \phi$

## 1.4 Rayonnement de sources réparties

### 1.4.1 Potentiels de couches

Lorsque la source ne peut plus être considérée comme ponctuelle, ce qui en acoustique correspond au fait que ses dimensions ne sont plus négligeables devant la longueur d'onde, on doit introduire la notion de source surfacique qui porte le nom de potentiel de couche : simple couche, double couche, couche d'ordre élevé.

#### Potentiel de simple couche

C'est une distribution d'une infinité de sources monopolaires répartie sur une surface  $\Sigma$  d'amplitude variable  $\mu(S)$ ,  $S \in \Sigma$ . Elle est représentée par  $f(M) = \mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M)$ , où  $\delta_\Sigma(M)$  est la distribution de Dirac attachée à la surface  $\Sigma$  et  $\otimes$  le produit tensoriel. Son rayonnement acoustique est donné par

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= f(M) * G(M) = (\mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M)) * G(M) \\ \Phi(M) &= \int_{\Sigma} \mu(S) G(M, S) dS. \end{aligned}$$

$\Phi(M)$  est le potentiel de simple couche. Il vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène  $(\Delta + k^2)\Phi(M) = \mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M)$  ainsi que la condition de Sommerfeld.  $\Phi(M)$  est une fonction analytique des coordonnées en dehors de  $\Sigma$ .  $\Phi(M)$  est continu à la traversée de  $\Sigma$  et sa dérivée normale est discontinue à la traversée de  $\Sigma$ . Si  $S_0 \in \Sigma$ , on a :  $\lim_{M \rightarrow S_0} \Phi(M) = \Phi(S_0)$  et

$$\partial_{n(S_0)} \Phi(S_0)^\pm = \pm \frac{\mu(S_0)}{2} + \int_{\Sigma} \mu(S) \partial_{n(S_0)} G(S_0, S) dS$$

$\partial_{n(S_0)} \Phi(S_0)^\pm$  signifie que la dérivée normale est prise comme limite en  $S_0$  par la face supérieure ou inférieure de  $\Sigma$ , la valeur positive correspond à un point qui se situe à l'extérieur de la normale.

#### Potentiel de double couche

Si au lieu de répartir une infinité de monopôles, nous répartissons une infinité de dipôles, d'amplitude  $\mu(S)$ , orientés suivant la normale  $\bar{n}$  à la surface  $\Sigma$ , nous obtenons une double couche représentée par la distribution  $f(M) = -\bar{n} \cdot \bar{\nabla}(\mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M))$ . Son rayonnement est donné par

$$\Psi(M) = \int_{\Sigma} \mu(S) \partial_{n(S)} G(M, S) dS,$$

où  $\partial_{n(S)}$  indique que la dérivée normale se fait par rapport à la variable  $S$ .  $\Psi(M)$  est le potentiel de double couche, il vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène  $(\Delta + k^2)\Psi(M) = -\bar{n} \cdot \bar{\nabla}(\mu(S) \otimes \delta_\Sigma(M))$ . C'est une fonction analytique des coordonnées en dehors de  $\Sigma$ . La dérivée normale de  $\Psi(M)$  est continue à la traversée de  $\Sigma$  et  $\Psi(M)$  est discontinu à la traversée de  $\Sigma$  :

$$\Psi(S_0)^\pm = \pm \frac{\mu(S_0)}{2} + \int_\Sigma \mu(S) \partial_{n(S)} G(S_0, S) dS$$

On peut sans difficulté définir des sources réparties d'ordre plus élevé mais cela pose une difficulté : lors du passage à la limite sur la surface qui porte la couche, les potentiels d'ordre élevé font intervenir dans l'expression du champ qu'ils rayonnent des intégrales qui ne sont définies qu'au sens des parties finies d'Hadamard et dont le calcul est délicat. En outre, comme nous allons le voir ci-après, une combinaison linéaire de simple et double couches suffit pour décrire le champ acoustique rayonné ou diffracté par n'importe quelle source.

### 1.4.2 Représentation de Green de la pression, introduction à la théorie de la diffraction

Il y a de nombreuses manières de présenter la représentation de Green d'un champ acoustique tant son domaine d'application est vaste. La représentation de Green est un outil extrêmement puissant qui permet de transformer un problème différentiel aux limites en un problème intégral sur les bords du domaine. Cette formule établie au départ pour l'équation de Helmholtz peut se généraliser à de nombreux problèmes aux limites (comme les vibrations de structures telles les plaques, coques, ou les solides élastiques). Nous commençons par démontrer la formule de Green. Puis, sur un exemple de diffraction par un obstacle, nous mettrons en évidence que la source de diffraction peut être remplacée par une superposition de simples et doubles couches.

#### Formule de Green

Soit  $\sigma_f$ , le saut d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  à la traversée d'une surface  $\Sigma$  dans le sens de la normale (valeur de  $f$  après  $\Sigma$  moins valeur de  $f$  avant  $\Sigma$  pour une normale orientée vers l'extérieur) et soit  $\delta_\Sigma$  la distribution de Dirac portée par la surface  $\Sigma$ . La dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$  s'écrit au sens des distributions :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + n_i \sigma_f \delta_\Sigma,$$

où  $\{\cdot\}$  représente la valeur de la fonction en dehors des points de discontinuité. Par exemple, Dans  $\mathbb{R}^3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} f &= \{ \bar{\nabla} f \} + \bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{f} &= \{ \bar{\nabla} \cdot \bar{f} \} + \bar{n} \cdot \sigma_{\bar{f}} \delta_\Sigma \\ \Delta f &= \{ \Delta f \} + \sigma_{\partial_n f} \delta_\Sigma + \bar{\nabla} \cdot (\bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma). \end{aligned}$$

Démontrons le dernier résultat. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} f) \\ &= \bar{\nabla} \cdot (\{ \bar{\nabla} f \} + \bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma) \\ &= \{ \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} f \} + \bar{n} \cdot \sigma_{\bar{\nabla} f} \delta_\Sigma + \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma \} \\ \text{et } \partial_n &= \frac{\partial}{\partial n} = \bar{n} \cdot \bar{\nabla}. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant la formule de Green. Considérons une fonction définie dans  $\Sigma$  et nulle à l'extérieur de cette surface. Nous supposons que  $f$  est deux fois dérivable à l'intérieur de  $\Sigma$ . Nous avons :

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \sigma_{\partial_n f} \delta_\Sigma + \bar{\nabla} \cdot (\bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma),$$

Considérons le produit scalaire entre l'expression ci-dessus et une fonction  $\phi$ . La deuxième expression du second membre de l'équation précédent (notons la similitude entre cette relation et le potentiel de simple couche) devient :

$$\langle \sigma_{\partial_n f} \delta_\Sigma, \phi \rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \delta_\Sigma, \phi \right\rangle,$$

car  $f$  et ses dérivées partielles sont nulles à l'extérieur de la surface. De même, la troisième expression du second membre de cette équation (remarquons la similitude entre cette relation et le potentiel de double couche) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla} \cdot (\bar{n} \sigma_f \delta_\Sigma), \phi \rangle &= - \langle \sigma_f \delta_\Sigma, \bar{\nabla} \cdot (\bar{n} \phi) \rangle, \text{ par intégration par parties} \\ &= + \langle f \delta_\Sigma, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \rangle \end{aligned}$$

Soit :

$$\langle \Delta f, \phi \rangle = \langle \{\Delta f\}, \phi \rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \bar{n}}, \phi \right\rangle + \left\langle f \delta_\Sigma, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} \right\rangle = \langle f, \Delta \phi \rangle$$

$\bar{n}$  est la normale extérieure à la surface  $\Sigma$ . En explicitant le produit scalaire, nous obtenons facilement la formule de Green :

$$\int_V \phi \Delta f dV - \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \phi dS + \int_\Sigma f \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} dS = \int_V f \Delta \phi dV.$$

Cette expression est généralement écrite sous la forme suivante :

$$\int_V f \Delta \phi - \phi \Delta f dV = \int_\Sigma f \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \phi dS.$$

Pour un problème extérieur à une surface  $\Sigma$ , si la normale est choisie extérieure à la surface  $\Sigma$ , il convient de changer le signe du second membre.

## Représentation de Green

Considérons l'exemple suivant. On cherche à déterminer le champ de pression  $p(M)$ , solution dans l'espace  $\Omega$  (borné ou non), de l'équation de Helmholtz non homogène  $(\Delta + k^2)p(M) = f(M)$ , où  $f(M)$  est une source quelconque. On suppose en outre que  $p(M)$  vérifie la condition d'impédance  $\partial_{\bar{n}} p(S) + ik/\zeta p(S) = 0, S \in \Sigma$  sur un domaine borné  $\Sigma$  de  $\Omega$  (voir figure 1.4). Si  $\Omega$  est non borné, il faut adjoindre à ces équations les conditions de Sommerfeld.

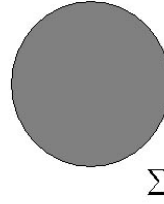
Rappelons que le noyau de Green  $G(M, M')$  est la solution de  $(\Delta_M + k^2)G(M, M') = \delta_{M'}(M)$ . Considérons la différence  $p(M)\Delta_M G(M, M') - G(M, M')\Delta p(M)$ . On a, en ajoutant et retranchant  $k^2 p(M)G(M, M)$ , on obtient

$$p(M)\Delta_M G(M, M') - G(M, M')\Delta p(M) = p(M)(\Delta_M G(M, M') + k^2 G(M, M')) - G(M, M')(\Delta p(M) + k^2 p(M)),$$

on intègre sur tout le domaine  $\Omega$  cette égalité et on applique au premier membre le théorème de Green

$$\int_\Omega (p(Q)\Delta_Q G(Q, M) - G(Q, M)\Delta p(Q)) dQ = - \int_\Sigma \left( \frac{\partial G(S, M)}{\partial \bar{n}(S)} p(S) - G(S, M) \frac{\partial p(S)}{\partial \bar{n}} \right) dS,$$

\* p(M)



\* f(M)

FIGURE 1.4 – Géométrie du problème de diffraction

dans la formule précédente, le signe du second membre a été changé puisque l'on est confronté à un problème extérieur. On a alors :

$$\int_{\Omega} (p(Q)(\Delta_Q G(Q, M) + k^2 G(Q, M)) - G(Q, M)(\Delta p(Q) + k^2 p(Q))) dQ = - \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial G(S, M)}{\partial \bar{n}(S)} p(S) - G(S, M) \frac{\partial p(S)}{\partial \bar{n}} \right) dS.$$

Or, par hypothèse  $\Delta_Q G(Q, M) + k^2 G(Q, M) = \delta_M(Q)$  et  $\Delta p(Q) + k^2 p(Q) = f(Q)$ . Donc :

$$p(M) - \int_{\Omega} G(Q, M) f(Q) dQ = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial p(S)}{\partial \bar{n}} G(S, M) - p(S) \frac{\partial G(S, M)}{\partial \bar{n}(S)} \right) dS.$$

Et on sait que  $p_0(M) = \int_{\Omega} G(Q, M) f(Q) dQ$  n'est autre que le produit de convolution  $G * f$ , en d'autres termes : la réponse du milieu en l'absence d'obstacles. On obtient finalement

$$p(M) = p_0(M) + \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial p(S)}{\partial \bar{n}} G(S, M) - p(S) \frac{\partial G(S, M)}{\partial \bar{n}(S)} \right) dS.$$

Cette formule porte le nom de représentation de Green de la pression. Ce résultat montre que la pression totale est composée de deux champs, le premier correspond au champ créé par la source en l'absence d'obstacle et le second correspond au champ créé par l'obstacle diffractant. L'intégrale sur  $\Sigma$  qui traduit l'effet de la frontière sur le champ total peut être considéré comme la superposition de deux champs acoustiques, le premier créé par un potentiel de simple couche de densité  $-\partial_n p(S)$  et le second par un potentiel de double couche de densité  $p(S)$ . Dans le cas qui nous intéresse ici, pour résoudre cette équation intégrale, remarquons tout d'abord que la condition aux limites nous dit que  $\partial_{\bar{n}} p(S) + ik/\zeta p(S) = 0, S \in \Sigma$ . La représentation de Green devient alors

$$p(M) = p_0(M) - \int_{\Sigma} p(S) \left( \frac{ik}{\zeta} G(S, M) + \frac{\partial G(S, M)}{\partial \bar{n}(S)} \right) dS,$$

cette équation est la représentation de Green de la solution cherchée. Cette équation intégrale n'est pas aisée à résoudre car l'inconnue (la pression acoustique) apparaît au premier membre de l'équation comme fonction de tout l'espace  $\Omega$  et au second sous la forme d'une fonction définie sur la surface  $\Sigma$ . Pour pouvoir la résoudre, il nous faut trouver une équation satisfaite par la pression définie sur la surface  $\Sigma$ . On ne peut néanmoins effectuer cette opération de passage à la limite pour  $M \in \Omega \rightarrow S \in \Sigma$  car le terme intégral qui contient la dérivée normale de  $G(S, M)$  est discontinu à la traversée de  $\Sigma$  (le potentiel de double couche est discontinu à la traversée de la surface qui le porte). Par passage à la limite, on obtient alors



$$\frac{1}{2}p(S) + \int_{\Sigma} p(S') \left( \frac{ik}{\zeta} G(S', S) + \frac{\partial G(S', S)}{\partial \bar{n}(S')} \right) dS' = p_0(S), S \in \Sigma$$

Cette équation est une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce qui détermine de façon unique l'inconnue  $p(S)$ . On peut en outre ajouter que l'espace fonctionnel auquel appartient la solution est l'espace des fonctions de module carré sommable (les fonctions d'énergie finie).

### Résolution des équations intégrales

L'équation intégrale précédente peut être mise sous la forme générique

$$\phi(S) + \int_{\Sigma} \phi(S') K(S', S) dS' = \psi(S), S \in \Sigma$$

où  $\psi(S)$  et  $K(S, S')$ , qui est nommé aussi noyau de l'équation, sont des données du problème (en général les noyaux intégraux sont des fonctions singulières). Comme on cherche des solutions de module carré sommable, il est naturel de chercher des solutions par la méthode de Galerkin.

On découpe la surface  $\Sigma$  en  $N$  éléments  $\Sigma_i$  sur lesquels on définit l'ensemble de  $N$  fonctions  $f_i$  réelles qui satisfont les deux propriétés :

- $f_i(S) = 0$  si  $S \notin \Sigma_i$ ,  $f_i(S) \neq 0$  si  $S \in \Sigma_i$  et  $f_i(S_i) = 1$  si  $S_i$  est un point qui appartient au sous domaine  $\Sigma_i$  ;
- toute combinaison linéaire des  $f_i$  a une régularité qui peut être fixée : constante par morceaux, continue, continûment dérivable, ... L'ensemble des  $f_i$  forme une base d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_N$  de dimension  $N$  dans lequel on va chercher la solution de l'équation intégrale à résoudre.

On cherche donc  $\phi(S) = \sum_i a_i f_i(S)$  où les constantes  $a_i$  sont les nouvelles inconnues du problème. L'intégrale  $\int_{\Sigma} \phi(S') K(S', S) dS'$  est alors approchée par

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \phi(S') K(S', S) dS' &= \int_{\Sigma} \sum_i a_i f_i(S') K(S', S) dS' \\ &= \sum_i a_i \int_{\Sigma_i} f_i(S') K(S', S) dS' \end{aligned}$$

Le calcul des  $a_i$  est choisi de façon à minimiser dans  $\mathcal{H}_N$  la norme de

$$\sum_i a_i \left( f_i(S) + \int_{\Sigma_i} f_i(S') K(S', S) dS' \right) - \psi(S)$$

Ce qui conduit à résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues

$$\sum_i a_i \left( \delta_i^j \int_{\Sigma_j} (f_j(S))^2 dS + \int_{\Sigma_j} \int_{\Sigma_i} f_i(S') f_j(S) K(S', S) dS' dS \right) = \int_{\Sigma_j} f_j(S) \psi(S) dS, j = 1, 2, \dots, N$$

En général, les intégrales qui apparaissent dans ces  $N$  équations doivent être calculée numériquement. On peut procéder de différentes façons. La première méthode, qui porte le nom de *méthode de Galerkin*, consiste à estimer numériquement les intégrations par rapport à  $S$  et  $S'$  avec le même précision (par une méthode de Gauss ou de Simpson). Cette méthode est précise (pour autant que la quadrature le soit) mais numériquement onéreuse.

La deuxième méthode consiste à évaluer les intégrales par rapport à  $S$  par une méthode de rectangle à un seul point. On choisit en général le point  $S_j$  de l'élément de surface  $\Sigma_j$  pour lequel  $f(S_j) = 1$ . Le système précédent devient alors

$$\sum_i a_i \left( \delta_i^j + \int_{\Sigma_i} f_i(S') K(S', S_j) dS' \right) = \psi(S_j), j = 1, 2, \dots, N.$$

Cette méthode, qui porte le nom de *méthode de collocation*, bien qu'étant la plus rapide n'est pas la moins précise. C'est une des méthodes les plus utilisées en Acoustique du fait de la simplicité de programmation qu'elle requiert.

Il existe une méthode intermédiaire, qui porte le nom de *méthode de collocation-Galerkin*, qui permet de combiner une partie des avantages des deux méthodes. Elle est basée sur le fait que les noyaux intégraux étant en général singuliers, les intégrales qui portent la singularité décrivent l'essentiel de "l'information" et que pour augmenter la qualité de la résolution, il convient de les calculer avec une grande précision. En pratique, les intégrales doubles qui correspondent aux termes diagonaux

$$\int_{\Sigma_i} \int_{\Sigma_i} f_i(S') f_i(S') K(S', S) dS' dS$$

sont évaluées par une intégration numérique double (méthode de Galerkin) tandis que les termes extra diagonaux sont évalués par une méthode de rectangle à un seul point (méthode de collocation)

$$\int_{\Sigma_j} f_i(S') K(S', S_j) dS'.$$

Cette méthode requiert un temps de calcul plus important que la méthode de collocation mais bien moins que celui requis par la méthode de Galerkin tout en étant plus précise que la méthode de collocation (et en pratique à peine moins précise que la méthode de Galerkin).

D'un point de vue pratique, il importe de noter que la convergence de ces trois méthodes est assurée. La difficulté étant de fixer a priori un critère de discrétisation. On constate généralement que pour la méthode de collocation avec une discrétisation par constantes par morceaux, un minimum de six points par longueur d'onde est nécessaire ; ceci correspond au nombre minimum de points qui sont nécessaires au calcul de l'intégrale d'une sinusoïde sur une période par une méthode de rectangles. Avec une discrétisation par des fonctions splines on peut se contenter d'un minimum de 4 points par longueur d'onde. Avec des polynômes orthogonaux comme les polynômes de Legendre ou de Chebychev (on parle alors de méthodes spectrales) on peut descendre à  $\pi$  points par longueur d'onde ce qui semble être le minimum raisonnable. En tout état de cause, il n'est pas envisageable de prendre moins de deux points par longueur d'onde du fait du théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.

## 1.5 Rayonnement acoustique d'un piston dans un plan

Nous nous intéressons ici à la pression acoustique créée par un piston circulaire prolongé à l'infini par un plan parfaitement rigide (il est souvent utilisé l'anglicisme "bafflé" pour désigner cette configuration). Ceci est une bonne approximation du haut-parleur pour lequel une membrane qui oscille avec une vitesse constante (sur toute sa surface) est enchâssée dans une enceinte rigide. Pour fixer les idées, nous considérerons un mouvement en régime harmonique. Remarquons que pour notre étude, il n'est pas important de distinguer le cas où le piston est effectivement un piston mécanique (cf. haut-parleur) ou une lame d'air à l'extrémité libre d'un tuyau, comme un instrument à vent, (l'approximation de ce dernier cas par un piston bafflé est bien entendu plus grossière). L'effet sur le champ acoustique créé est le même. En outre, notons qu'ici le cas étudié sort un peu du strict cadre du couplage fluide-structure puisque nous considérons que le fluide n'a aucune influence sur la vibration de la membrane. De nombreuses méthodes existent pour décrire le phénomène. Nous nous contenterons d'en exposer une, basée sur la représentation de Green de la pression acoustique. Celle-ci est donnée, pour une normale extérieure, par :

$$p(M) = \int_{\sigma} F(Q) G(M; Q) d\sigma(Q) + \int_{\Sigma} p(Q) \partial_{n(Q)} G(M; Q) - \partial_n p(Q) G(M; Q) d\Sigma(Q),$$

expression dans laquelle  $F(Q)$  est la source acoustique et  $\sigma$  le support spatial de celle-ci. Rappelons que dans cette équation les deux intégrales représentent, pour la première, la pression acoustique créée

par la source acoustique présente au sein du fluide et, pour la seconde, la modification de la pression acoustique créée par la présence des frontières ; cet effet peut être de deux types, soit un phénomène de réflexion-diffraction tel qu'il peut être observé dans le cas de frontières passives (comme un mur ou un objet rigide), soit un phénomène de rayonnement acoustique comme dans le cas qui nous intéresse.

Les équations du problème sont les suivantes. Considérons dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , muni du repère cartésien usuel  $(0, x, y, z)$  le demi espace défini par  $z > 0$ . Ce domaine est occupé par un fluide de densité  $\rho_0$  et de célérité des ondes acoustique  $c_0$ . Le demi espace  $z < 0$  est occupé par un fluide dont nous négligerons l'influence. La normale au plan  $\Sigma$  défini par  $z = 0$  est orienté par l'axe des  $z$ . Sur le plan  $z = 0$ , un disque de rayon  $R$  centré à l'origine définit le domaine  $S$  qu'occupe notre piston qui est animé d'un déplacement vibratoire  $u$  donnée par :

$$u = u_0 e^{-i\omega t},$$

où  $u_0$  est une constante. Dans toute la suite du problème, nous omettrons la dépendance temporelle. Nous supposons en outre qu'il n'y a pas de source acoustique au sein du fluide. Le fluide est supposé parfait (sans viscosité). De ce fait, à l'interface plan-fluide, il y a continuité des accélérations vibratoires normales. Les équations du problème sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) P(M) &= 0 \\ \partial_n P(Q) &= \omega^2 \rho_0 u_0, Q \in S \\ &= 0, Q \in \Sigma - S \end{aligned}$$

La pression acoustique, solution de l'équation de Helmholtz est donnée par la représentation de Green :

$$p(M) = \int_{\Sigma} p(Q) \partial_{n(Q)} G(M; Q) - \partial_n p(Q) G(M; Q) d\Sigma(Q),$$

les coordonnées des points  $M$  et  $Q$  sont respectivement  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z' = 0)$  car  $z'$  appartient au plan  $z = 0$ . La continuité des accélérations vibratoires normales nous permet d'écrire la représentation de Green comme suit :

$$p(M) = \int_{\Sigma} p(Q) \partial_{n(Q)} G(M; Q) d\Sigma(S) - \omega^2 \rho_0 \int_S u_0 G(M; Q) d\Sigma(Q).$$

Au lieu de résoudre cette équation (qui est une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce), nous allons profiter de la géométrie particulière du problème pour simplifier encore cette équation. Cherchons le noyau de Green  $\mathcal{G}$  qui satisfait au problème de Neumann :

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \mathcal{G}(M, M') &= \delta_{M'}(M) \\ \partial_{n(M)} \mathcal{G}(M, M') &= 0, M \in \Sigma \end{aligned}$$

Condition de conservation de l'énergie

Pour calculer cette fonction de Green, on peut utiliser la méthode des images qui considère que le champ émis en  $M'$  et reçu en  $M$  est la superposition du champ direct émis par la source primaire  $M'$  et du champ réfléchi par le plan horizontal. Ce dernier est modélisé comme le champ émis par une source symétrique  $M''$  par rapport au plan horizontal de la source primaire  $M'$  (voir figure1.5).

On a

$$\mathcal{G}(M, M') = \frac{-e^{ikd(MM')}}{4\pi d(MM')} + C \frac{-e^{ikd(MM'')}}{4\pi d(MM'')},$$

où les coordonnées des points  $M, M'$  et  $M''$  sont données par  $M = (x, y, z)$ ,  $M' = (x', y', z')$  et  $M'' = (x'' = x', y'' = y', z'' = -z')$ ; les distances  $d(MM')$  et  $d(MM'')$  sont données par  $d(MM') =$

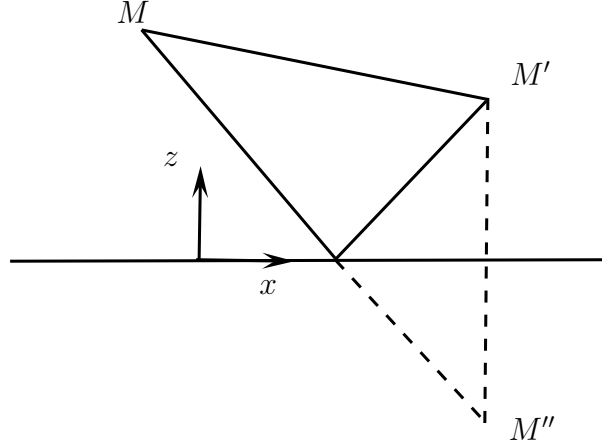


FIGURE 1.5 – Méthode des images

$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  et  $d(MM'') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$ .  $C$  est une constante, a priori complexe, qui dépend de la condition aux limites sur le plan. On a

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(M, M') = \frac{-e^{ikd(MM')}}{4\pi d(MM')^2} \left( ik - \frac{1}{d(MM')} \right) (z-z') + C \left( ik - \frac{1}{d(MM'')} \right) (z-z'') \frac{-e^{ikd(MM'')}}{4\pi d(MM'')^2}.$$

En  $z=0$ , on a  $d(MM') = d(MM'')$ , avec  $z'' = -z'$ , il est aisé de voir que

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(M, M') = 0 \Rightarrow \frac{-e^{ikd(MM')}}{4\pi d(MM')^2} \left( ik - \frac{1}{d(MM')} \right) (-z' + Cz') = 0 \text{ si } C = 1.$$

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{G}(M, M') = -\frac{e^{ikd(MM')}}{4\pi d(MM')} - \frac{e^{ikd(MM'')}}{4\pi d(MM'')}$$

où  $M''$  est le symétrique de  $M'$  par rapport au plan  $\Sigma$ . Si  $M = (x, y, z)$  et  $M' = (x', y', z')$ , nous avons  $d(M, M') = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{1/2}$  et  $d(M, M'') = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2)^{1/2}$ . Puisque la dérivée normale du noyau de Green est nulle sur le plan  $\Sigma$ , la représentation de Green devient alors :

$$p(M) = -\omega^2 \rho_0 \int_S u_0 \mathcal{G}(M; Q) d\sigma(Q).$$

Cette intégrale est souvent nommée intégrale de Kirchhoff-Helmholtz ; elle stipule que le champ acoustique rayonné par une surface vibrante peut être approché par une simple intégrale de convolution entre la fonction de Green du milieu et le champ vibratoire de la surface. Cette formule donne des résultats acceptables dans une direction normale à la surface et pour une structure peu influencée par le fluide environnant (par exemple un haut-parleur Hi Fi ou une structure en acier dans l'air). Pour une structure légère (ou un fluide lourd), il faut tenir compte de la présence du fluide pour calculer le déplacement de la structure. Lorsque l'on s'intéresse au champ acoustique près du plan de la structure, les effets de diffraction par le bord deviennent prépondérants et l'intégrale de Kirchhoff donne des résultats aberrants. Sur le plan  $\Sigma$ ,  $z' = 0$  et les points  $M'$  et  $M''$  sont confondus, la pression acoustique rayonnée par le piston est alors donnée par le résultat simple suivant :

$$p(M) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_S \frac{e^{ik((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{1/2}}}{2\pi ((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{1/2}} dx' dy'.$$

Ce résultat est valable pour un piston de forme quelconque. Toutefois, dans le cas d'un piston circulaire, nous pouvons obtenir un résultat (approché) analytique.

### 1.5.1 Rayonnement en champ lointain du piston circulaire - Directivité

Pour ce faire, plaçons-nous en coordonnées sphériques  $(O, r, \theta, \phi)$  (voir figure 1.6). Les coordonnées du point  $M$  sont données par :  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$  et celle de  $M'$  par :  $x' = r' \sin \theta' \cos \phi'$ ,  $y' = r' \sin \theta' \sin \phi'$ ,  $z' = r' \cos \theta'$ .

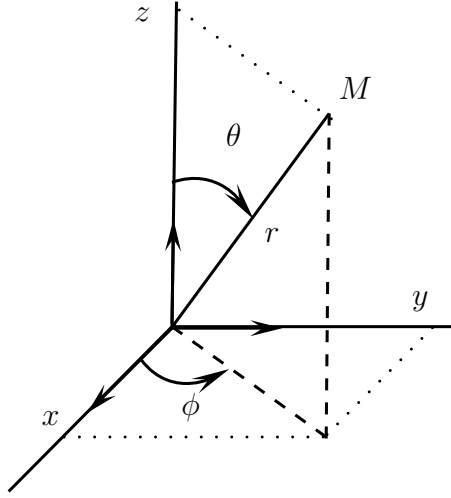


FIGURE 1.6 – Système de coordonnées sphériques

Rappelons ici que  $M'$  est un point du piston qui est proche de l'origine avec donc  $r'/r \ll 1$ . Nous aurons besoin du résultat suivant : pour  $kr \gg 1$  et  $r'/r \ll 1$  nous avons le développement

$$\frac{e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2}}}{2\pi((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2}} \approx \frac{e^{ikr}}{2\pi r} e^{-ikr'(\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta')}.$$

Pour démontrer ce résultat, reportons le changement de variables dans l'expression de la distance entre  $M$  et  $M'$ . On a

$$\begin{aligned} (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r'^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r'^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta + r'^2 \cos^2 \theta' - 2rr' \cos \theta \cos \theta' \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' \\ &\quad \quad \quad + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta') \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta, \phi, \theta', \phi'), \end{aligned}$$

avec  $f(\theta, \phi, \theta', \phi') = \sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta'$ . Nous avons pour  $r \gg r'$ ,  $r'/r \ll 1$ , donc  $r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta, \phi, \theta', \phi') = r^2(1 + (r'/r)^2 - 2r'/r f(\theta, \phi, \theta', \phi')) \approx r^2(1 - 2r'/r f(\theta, \phi, \theta', \phi'))$ .

On obtient ainsi  $\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' f(\theta, \phi, \theta', \phi')} \approx r(1 - r'/r f(\theta, \phi, \theta', \phi'))$ . Cette expression apparaît deux fois dans la fonction de Green. Une fois au dénominateur pour lequel nous pouvons l'approcher par  $r$ . Par contre au numérateur l'expression, argument de l'exponentielle complexe, est un terme de phase et nous devons garder l'expression complète  $r - r' f(\theta, \phi, \theta', \phi')$ . Nous obtenons finalement

$$\frac{e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2}}}{2\pi((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{1/2}} \approx \frac{e^{ikr}}{2\pi r} e^{-ikr' f(\theta, \phi, \theta', \phi')} \text{ cqfd.}$$

De fait ce résultat pour être valable doit non seulement vérifier l'approximation haute fréquence  $kr \gg 1$  mais aussi grande distance source récepteur  $r \gg r'$ .

Sur le plan  $\Sigma$  nous avons  $z' = r' \cos \theta' = 0 \Rightarrow \theta' = \pi/2$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2+z^2)^{1/2}}}{2\pi((x-x')^2+(y-y')^2+z^2)^{1/2}} &\approx \frac{e^{ikr}}{2\pi r} e^{-ikr' \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')} \\ &\approx \frac{e^{ikr}}{2\pi r} e^{-ikr' \sin \theta \cos(\phi-\phi')}, \end{aligned}$$

la pression acoustique rayonnée par le piston en champ lointain est alors donnée par l'intégrale :

$$\begin{aligned} p(M) &\approx \omega^2 \rho u_0 \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-ikr' \sin \theta \cos(\phi-\phi')} r' dr' d\phi' \\ &\approx \omega^2 \rho u_0 \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_0^R r' \left( \int_0^{2\pi} e^{-ikr' \sin \theta \cos \psi} d\psi \right) dr' \\ &\approx \omega^2 \rho u_0 \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_0^R r' 2\pi J_0(kr' \sin \theta) dr' \text{ car } J_0(x) = \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \psi} d\psi, \end{aligned}$$

par changement de variable  $z = k \sin \theta$ , nous avons

$$\begin{aligned} p(M) &\approx \omega^2 \rho u_0 R^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{k^2 R^2 \sin^2 \theta} \int_0^{kR \sin \theta} z J_0(z) dz \\ &\approx \omega^2 \rho u_0 R^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta}, \end{aligned}$$

car  $\int_0^z t^n J_{n-1}(t) dt = z^n J_n(z)$ ,  $n > 0$ . Ainsi, la directivité  $\Xi(\theta, \phi)$  (parfois appelée fonction de forme), qui est définie par le rapport entre les pressions acoustiques que rayonnent la structure considérée et une source ponctuelle omnidirectionnelle située à l'origine (le noyau de Green)  $-\exp(ikr)/4\pi r$  s'écrit :

$$\Xi(\theta, \phi) = -4\pi \omega^2 \rho_0 u_0 R^2 \frac{J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta}.$$

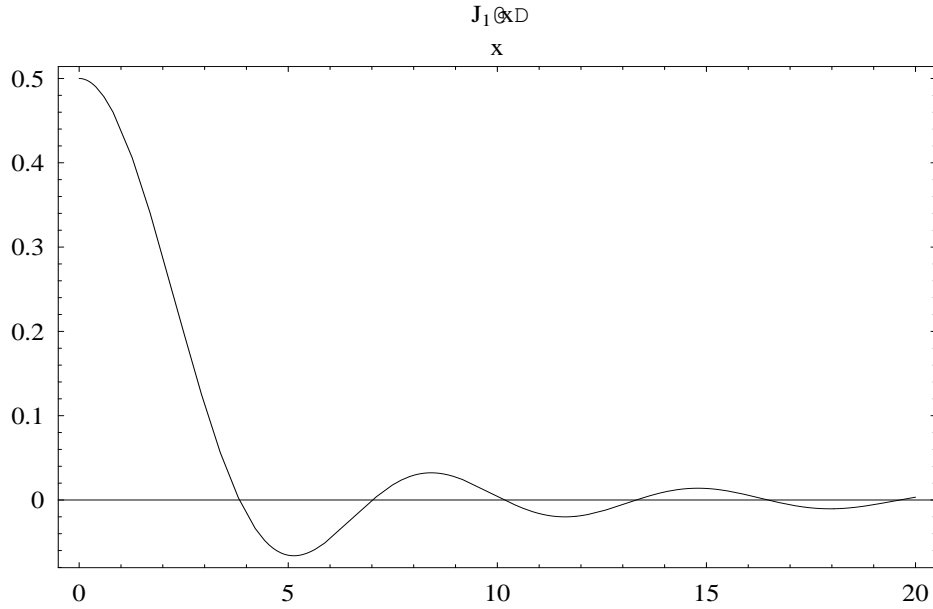
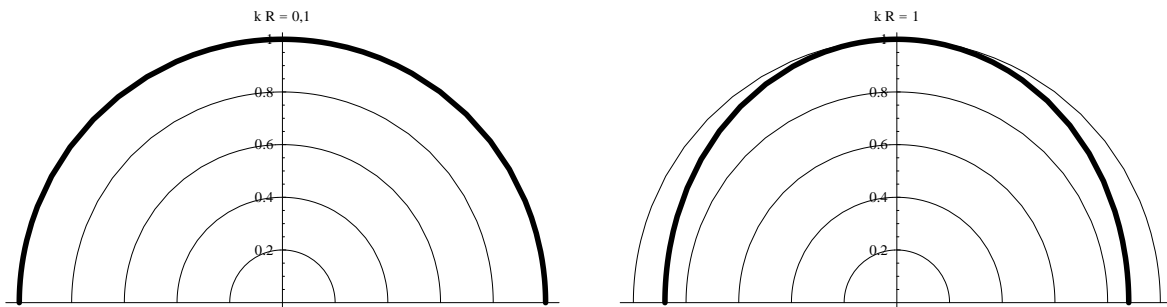
L'allure de  $\frac{J_1(x)}{x}$  est donnée dans la figure 1.7. Nous avons une fonction qui présente un maximum fini à l'origine puis une série d'oscillations qui s'amortissent rapidement.

Afin de mieux visualiser l'effet de la directivité, nous présentons ci-dessous quelques exemples de diagrammes de directivité en échelle linéaire pour en basse (figure 1.8), moyenne (figure 1.9) et haute (figure 1.10) fréquences. Le piston est situé à l'origine sur l'axe des ordonnées (qui représente le baffle). Nous avons choisi de présenter ces résultats en fonction du nombre sans dimension usuel  $kR$ . À basse fréquence  $kR \leq 1$ , le piston se comporte comme une source omnidirectionnelle (il n'y a pas de direction privilégiée). Par contre lorsque la fréquence augmente (typiquement dès que  $kR \geq 5$ ), il apparaît des zones de "silence" dans lesquelles la pression que rayonne le piston est nulle. L'espace est divisé en zones de bruit (cônes) séparées par des zones de silences ; la pression est toujours maximale dans l'axe du piston. Ceci explique (en partie) pourquoi les fabricants d'enceintes acoustiques montent plusieurs voies ; généralement trois (pour les basses, moyennes et hautes fréquences) ce qui permet assurer une enceinte qui présente une directivité à peu près constante sur une large gamme de fréquence.

### 1.5.2 Rayonnement dans l'axe du piston circulaire

Dans ce cas, on a  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = r$ . On a  $(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 = r'^2 + z^2$ . La pression acoustique rayonnée dans l'axe est donc donnée par

$$p(x=0, y=0, z) = p(0, z) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(z^2+r'^2)^{1/2}}}{2\pi(z^2+r'^2)^{1/2}} r' dr' d\phi' = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_0^R \frac{e^{ik(z^2+r'^2)^{1/2}}}{(z^2+r'^2)^{1/2}} r' dr'.$$


 FIGURE 1.7 – Allure de la fonction  $J_1(x)/x$ 

 FIGURE 1.8 – Directivité du piston pour  $kR = 0, 1$  (gauche) et  $kR = 1$  (droite)

Par changement de variable  $u = (z^2 + r'^2)^{1/2}$ , on obtient aisément

$$p(0, z) = \omega^2 \rho_0 u_0 \int_z^{(z^2 + R^2)^{1/2}} e^{iku} du = -\frac{\omega^2 \rho_0 u_0}{k} \left[ e^{ik(z^2 + R^2)^{1/2}} - e^{ikz} \right].$$

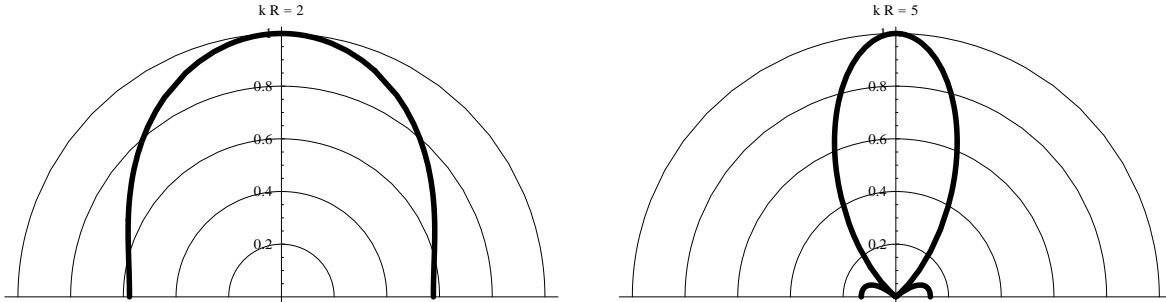
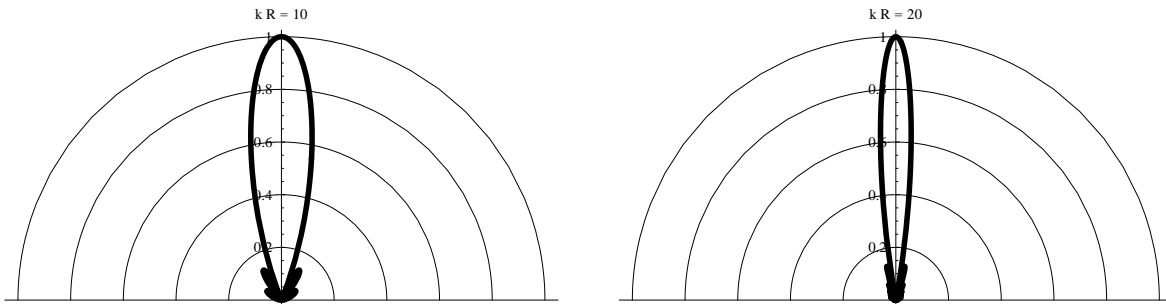
En module, on obtient  $|p(0, z)| = \omega \rho_0 c_0 |u_0| \left| e^{ik(z^2 + R^2)^{1/2}} - e^{ikz} \right|$ . Or on sait que

$$\begin{aligned} \left| e^{i\alpha} - e^{i\beta} \right| &= \left[ (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \right]^{1/2}, \alpha = k(z^2 + R^2)^{1/2}, \beta = kz \\ &= [2 - 2 \cos(\alpha - \beta)]^{1/2} \\ &= 2 \left| \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right|. \end{aligned}$$

On a alors

$$|p(0, z)| = 2\omega \rho_0 c_0 |u_0| \left| \sin \frac{k}{2} \left( (z^2 + R^2)^{1/2} - z \right) \right|.$$

Lorsque  $z \rightarrow \infty$ , a priori, il n'est pas évident de voir que l'on a une pression qui décroît en  $1/r$ . Par développement limité, on a  $(z^2 + R^2)^{1/2} - z = z(1 + (R/z)^2)^{1/2} - z = R(1/2(R/z) - 1/8(R/z)^3 + \mathcal{O}((R/z)^5))$ .

FIGURE 1.9 – Directivité du piston pour  $kR = 2$  (gauche) et  $kR = 5$  (droite)FIGURE 1.10 – Directivité du piston pour  $kR = 10$  (gauche) et  $kR = 20$  (droite)

On peut alors remplacer le sinus par le premier terme du développement limité de son argument et on a

$$|p(0, z \rightarrow \infty)| \approx \frac{\omega^2 \rho_0 R^2}{2z} |u_0|.$$

La figure 1.11 montre l'évolution de la pression rayonnée par un piston circulaire dans l'axe de celui-ci lorsque l'on s'éloigne pour trois nombres d'onde ( $k = 5 \text{ m}^{-1}$ ,  $k = 10 \text{ m}^{-1}$  et  $k = 50 \text{ m}^{-1}$ ). On remarque aisément qu'en champ proche le champ acoustique varie énormément puis, à partir d'une certaine distance  $z \approx kR^2/(2\pi) = R(R/\lambda)$ , celui-ci se stabilise et se comporte comme un monopôle à décroissance très régulière en  $1/r$ . C'est généralement comme cela que l'on définit le champ proche<sup>3</sup> : distance à un corps vibrant à partir de laquelle le champ de pression décroît en  $1/r$ . On retiendra qu'une bonne approximation du champ proche en moyenne fréquence est de considérer que celui-ci existe dans un domaine dont le volume est de l'ordre de grandeur de la plus petite sphère qui contient la source<sup>4</sup>. De  $z \approx R(R/\lambda)$ , on tire que le champ lointain s'observe pour  $z/R = R/\lambda$  et donc le résultat un peu paradoxal qui est que cette distance diminue à basse fréquence et augmente à haute fréquence.

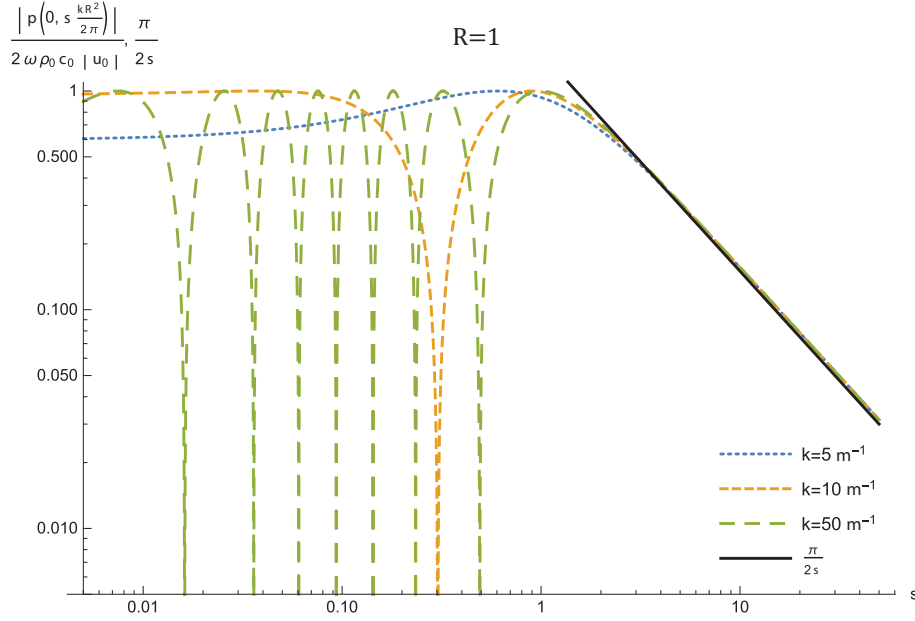
## 1.6 Rayonnement acoustique d'une structure rectangulaire bafflée

Intéressons-nous maintenant au rayonnement acoustique d'une surface vibrante bafflée. Cela peut être vu comme une généralisation du piston bafflé ou comme une première approche du rayonnement acoustique des structures. La grande différence avec ce que nous allons étudier par la suite tient au fait qu'ici la structure qui rayonne n'est absolument pas influencée par le fluide à son contact. On

3. Il existe bien évidemment d'autres définitions qui font intervenir la vitesse acoustique en plus de la pression, comme par exemple la distance à partir de laquelle on a  $p\bar{v} = \rho_0 c_0$ .

4. À 340 Hz, qui est une moyenne fréquence "d'usage courant", la longueur d'onde est de l'ordre du mètre, qui est une dimension de l'ordre de grandeur des structures communément rencontrées en vibroacoustique.




 FIGURE 1.11 – Pression acoustique rayonnée dans l'axe d'un piston de rayon  $R = 1m$ 

peut d'ores et déjà remarquer que c'est une approximation qui est suffisante dans de nombreux cas industriels (comme tout ce qui touche au rayonnement des machines).

Considérons donc un problème très similaire au problème du piston mais dans lequel la surface vibrante n'est plus un piston animé d'une vitesse uniforme mais une surface rectangulaire  $S : (x, y) \in ]-a, a[ \cup ]-b, b[$  animée d'un déplacement vibratoire  $u(x, y)$  donnée par  $u(x, y) = u_0(x, y) \exp(-i\omega t)$ . A l'interface surface vibrante-fluide, il y a toujours continuité des accélérations vibratoires normales. La pression acoustique  $p(M)$ ,  $M \in z > 0$  rayonnée par la surface vibrante est solution du problème :

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) p(M) &= 0 \quad \in z > 0, \\ \partial_n p(Q) &= \omega^2 \rho_0 u_0(Q), \quad Q = (x, y) \in S, \\ \partial_n p(Q) &= 0, \quad Q \in \Sigma - S \end{aligned}$$

La pression acoustique rayonnée par la surface est obtenue par représentation de Green :

$$p(M) = \frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b u_0(x', y') \frac{e^{ik((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{1/2}}}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)^{1/2}} dx' dy'.$$

Comme précédemment, nous écrivons la fonction de Green en champ lointain ; sur le plan  $\Sigma$  nous avons  $x' = r' \cos \phi'$ ,  $y' = r' \sin \phi'$ , on obtient :

$$p(r, \theta, \phi) \approx \frac{\omega^2 \rho_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-a}^a \int_{-b}^b u_0(x', y') e^{-ik \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi)} dx' dy'.$$

L'intégrale double qui apparaît au second membre peut être vue comme la transformée de Fourier spatiale partielle du déplacement de la surface :

$$[\tilde{u}_0(\xi, \zeta)]_{\xi = k \sin \theta \cos \phi, \zeta = k \sin \theta \sin \phi} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b u_0(x', y') e^{-ik \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi)} dx' dy'.$$

Soit finalement  $p(r, \theta, \phi) \approx \omega^2 \rho_0 / (2\pi) \exp(ikr) / (r) \tilde{u}_0(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi)$ . Pour fixer les idées, prenons deux exemples. Le premier est celui du piston rectangulaire  $u_0(x, y) = 1$ , on obtient aisément :

$$\tilde{u}_0(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) = \frac{2 \sin(ak \sin(\theta) \cos(\phi))}{k \sin(\theta) \cos(\phi)} \times \frac{2 \sin(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{k \sin(\theta) \sin(\phi)}.$$

Soit finalement :

$$p_0(r, \theta, \phi) \approx \frac{2\omega^2 \rho_0 e^{ikr}}{\pi r} \frac{\sin(ak \sin(\theta) \cos(\phi))}{k \sin(\theta) \cos(\phi)} \times \frac{\sin(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{k \sin(\theta) \sin(\phi)}.$$

On obtient un comportement similaire au piston circulaire.

Le second exemple est celui de la structure vibrante dont la déformée est une fonction sinusoïdale d'ordre  $m$  et  $n$ . Deux cas se distinguent : celui d'une fonction antisymétrique par rapport au centre de la structure  $u_{mn}^a(x, y) = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$  et celui d'une fonction symétrique par rapport au centre de la structure  $u_{mn}^s(x, y) = \cos((m-1/2)\pi x/a) \cos((n-1/2)\pi y/b)$ .  $m$  et  $n$  caractérisent le nombre d'oscillations de la structure. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{mn}^a(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) &= (-1)^{m+n} \frac{2ma\pi \sin(ak \cos(\phi) \sin(\theta))}{(m\pi)^2 - a^2 k^2 \cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2} \times \frac{2nb\pi \sin(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{(n\pi)^2 - b^2 k^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2} \\ \tilde{u}_{mn}^s(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi) &= (-1)^{m+n} \frac{2(m-1/2)a\pi \cos(ak \cos(\phi) \sin(\theta))}{((m-1/2)\pi)^2 - a^2 k^2 \cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2} \\ &\quad \times \frac{2(n-1/2)b\pi \cos(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{((n-1/2)\pi)^2 - b^2 k^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2}. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'étude ultérieure, posons  $k_m = m\pi/a$  et  $k_n = n\pi/b$  ( $k_m$  et  $k_n$  sont des nombres d'onde). On obtient :

$$\begin{aligned} p_{mn}^a(r, \theta, \phi) &\approx \frac{2\omega^2 \rho_0 e^{ikr}}{\pi r} (-1)^{m+n} k_m k_n \frac{\sin(ak \cos(\phi) \sin(\theta))}{k_m^2 - k^2 \cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2} \times \frac{\sin(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{k_n^2 - k^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2} \\ p_{mn}^s(r, \theta, \phi) &\approx \frac{2\omega^2 \rho_0 e^{ikr}}{\pi r} (-1)^{m+n} k_{m-1/2} k_{n-1/2} \frac{\cos(ak \cos(\phi) \sin(\theta))}{k_{m-1/2}^2 - k^2 \cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2} \times \frac{\cos(bk \sin(\theta) \sin(\phi))}{k_{n-1/2}^2 - k^2 \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2}. \end{aligned}$$

Malgré l'apparente similitude des résultats, on obtient un comportement différent du piston. En effet, si l'on se place en très basse fréquence, les termes en  $k^2$  des dénominateurs peuvent être négligés. Et on voit aisément que plus la structure présente un grand nombre d'oscillations, ce qui correspond à des ordres  $m$  et  $n$  élevés (et donc à des nombres d'onde  $k_m$  et  $k_n$  élevés), plus l'amplitude maximale rayonnée sera faible. On a suivant la normale à la surface  $p_{mn}^a(r, \theta = 0, \phi) \approx 0$  et  $p_{mn}^s(r, \theta = 0, \phi) \approx \omega^2 \rho_0 \exp(ikr)/(4\pi r) (-1)^{m+n} 8ab/(\pi^2(m-1/2)(n-1/2))$ , que l'on compare au rayonnement du piston rectangulaire dans l'axe du piston (attention, le rayonnement de  $p_{mn}^a$  est nul dans l'axe de la surface)  $p_0(r, \theta = 0, \phi) \approx \omega^2 \rho_0 \exp(ikr)/(4\pi r) 8ab$ . La pression rayonnée présente des maxima dont l'expression exacte est fixée par la dérivée de la fonction. Celle-ci est lourde à estimer. Néanmoins, on peut grossièrement estimer la position et l'amplitude de ces maxima en s'intéressant aux zéros du dénominateur. Celui-ci s'annule pour certaines combinaisons de  $\theta$  et  $\phi$  si  $k_m, k_n < k$ . Les maxima de pression apparaissent aux points d'angle  $\theta_0, \phi_0$  donnés par  $k_m = k \cos(\phi_0) \sin(\theta_0)$ ,  $k_n = k \sin(\phi_0) \sin(\theta_0)$ . On pose  $k_s = \sqrt{k_m^2 + k_n^2}$ .  $k_s$  peut être associé à une longueur d'onde structurale effective  $\lambda_s = 2\pi/k_s$ . On obtient les coordonnées angulaires de quatre points : avec  $\theta_0 = \sin^{-1} k_s/k$  et  $\phi_0 = \tan^{-1} k_n/k_m$ ,  $\phi_1 = -\phi_0$ ,  $\phi_{2,3} = \pi \pm \phi_0$ . On nomme ces angles les angles critiques ou les angles de coïncidence. On montre que la pression acoustique en  $\theta_0 \phi_0$  est indépendante des ordres  $m$  et  $n$  pour les deux types de rayonnement. Par la règle de de l'Hospital, on lève aisément les indéterminations (0/0) et on obtient :

$$p_{mn}^{a,s}(r, \theta_0, \phi_p) \approx \omega^2 \rho_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} 2ab \text{ pour } k_m, k_n < k, p = 0, 1, 2, 3.$$

On considère ici l'exemple d'une structure rectangulaire de dimension  $a = 0,9$  m et  $b = 0,7$  m dont on présente les déformées et directivités pour quelques configurations remarquables. En très basse fréquence, le rayonnement est toujours monopolaire pour les structures à déformées symétriques

et quadripôle pour les déformées antisymétriques. Aux hautes fréquences ( $k > k_m, k_n$ ), on observe que tous les modes (é l'exception du premier mode symétrique) ont un comportement qui peut être approximativement décrit comme soit dipolaire pour les modes symétriques comme sur la figure 1.14 (on parle parfois de modes de bords) soit quadripôle pour les modes antisymétriques comme sur les figures 1.13 et 1.15 (on parle parfois de modes de coins). Ce comportement aux basses et hautes fréquences est dé à un phénomène de compensation du rayonnement acoustique de régions adjacentes de la structure qui vibrent en opposition de phase (voir figure 1.16) et qui conduit à l'annulation presque totale du rayonnement acoustique puisque seules les régions périphériques rayonnent efficacement. Ce phénomène de compensation est bien moins marqué aux hautes fréquences, puisque comme l'on peut l'observer sur les figures (tracées en amplitude et non en niveau) il y a toujours de nombreux lobes intermédiaires ainsi qu'un niveau maximal beaucoup plus élevé. Aux fréquences moyennes, lorsque les longueurs d'onde mécanique et acoustique sont comparables les phénomènes d'interférences sont très marqués et il y a autant de maxima de rayonnement que de maxima d'amplitude vibratoire.

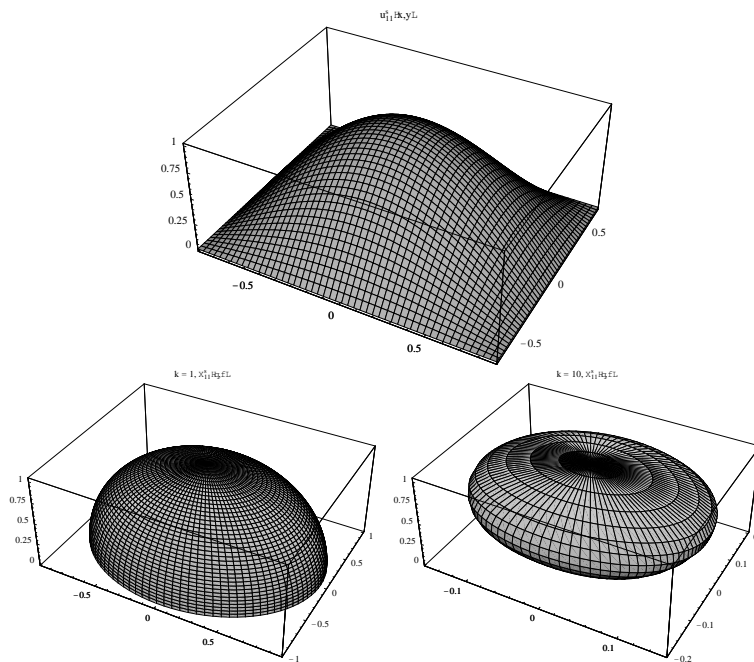


FIGURE 1.12 – Déformée et directivité “symétrique” pour  $m = 1$ ,  $n = 1$  et pour  $k = 1$  et  $10 \text{ m}^{-1}$

On peut noter qu’aux très basses fréquences, pour les modes à déformées symétriques qui ne comportent qu’un seul maximum suivant une direction, on a un comportement monopolaire évident. Ce n’est en rien contradictoire avec le phénomène de compensation, bien au contraire, puisque dans ce cas les bords rayonnent en phase, ce qui conduit, du fait de la grande longueur d’onde acoustique, à une interférence constructive des deux régions qui agissent comme un seul monopole. Aux plus hautes fréquences, ces zones se comportent comme des sources indépendantes comme le montrent les directivités à deux lobes que l’on observe sur la figure 1.14.

On retiendra que le maximum de rayonnement d’une structure s’observe souvent au voisinage de ses discontinuités géométriques (modes de bord et modes de coin) puisque le phénomène de compensation est beaucoup plus faible. Ceci n’est pas vérifié au bord des structures non bafflées car dans ce cas la compensation est maximale par équilibrage des pressions de part et d’autre du bord.

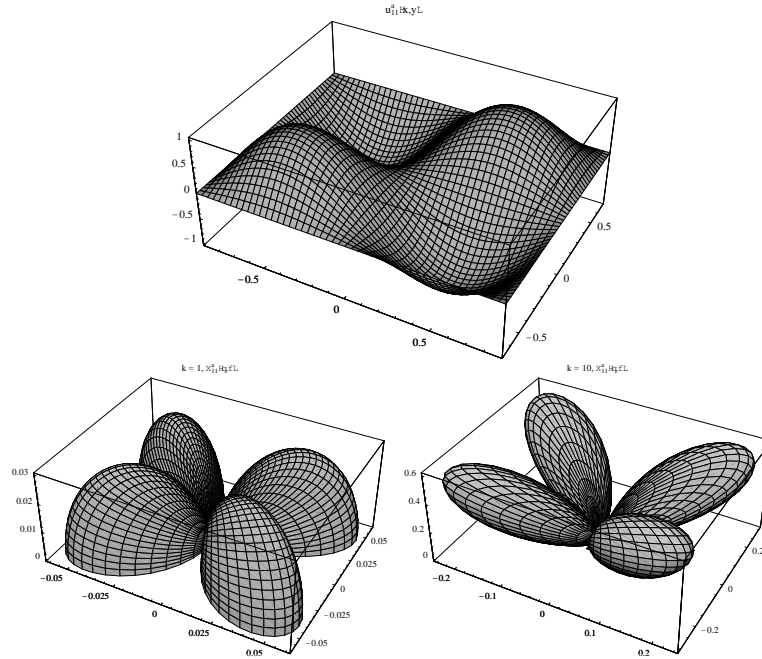


FIGURE 1.13 – Déformée et directivité “antisymétrique” pour  $m = 1$ ,  $n = 1$  et pour  $k = 1$  et  $10 \text{ m}^{-1}$

## 1.7 Rayonnement acoustique de sources en mouvement

### 1.7.1 Sources compactes et non compactes

#### Source spatialement compacte

On repart de l’approximation de Fraunhofer en considérant que la source est animée d’un mouvement de vitesse caractéristique  $v$  :

$$p(M, t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q \left( S, t - \frac{r_M}{c_0} + \frac{r_S}{c_0} \right) dS.$$

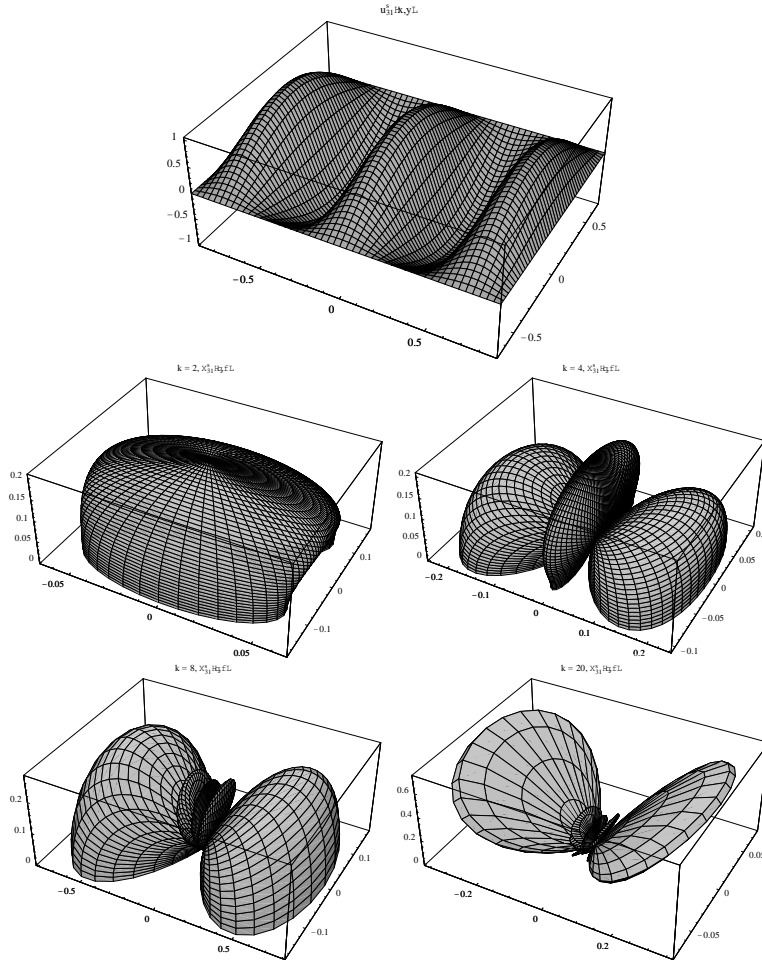
On a  $\tau_r \approx t - r_M/c_0 + r_S/c_0 = t - r_M/c_0 + \Delta\tau_r$ . La variation du temps de retard est liée à la dimension caractéristique de la source  $\ell$  et on a  $\Delta\tau_r = r_S/c_0 \approx \ell/c_0$ . Pour que l’on puisse considérer que la source soit compacte, la variation de temps de retard sur le volume  $V \approx \ell^3$  de la source doit être petite devant le temps d’évolution de la source  $\tau_s = \ell/v$  soit  $\Delta\tau_r/\tau_s \approx \ell/c_0 v/\ell = M \ll 1$ , où  $M$  est le nombre de Mach. Alors :

$$p(M, t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q \left( S, t - \frac{r_M}{c_0} \right) dS.$$

Dans le cas d’une source spatialement compacte, la longueur d’onde du signal  $\lambda$  est grande devant la taille de la source  $\lambda/\ell \approx 1/M \gg 1$ .

#### Source spatialement non compacte ( $M \gg 1$ )

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque la source se déplace à une vitesse supersonique. En champ lointain, on a toujours  $r \approx r_M - r_S$ . Posons  $S = (r_S, y_S)$  et repartons de l’expression générale


 FIGURE 1.14 – Déformée et directivité “symétrique” pour  $m = 3$ ,  $n = 1$  et pour  $k = 2, 4, 8$  et  $20 \text{ m}^{-1}$ 

de la pression rayonnée qui pour une source  $Q(S, t)$  quelconque est donnée par :

$$\begin{aligned}
 p(M, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V(S)} \int_{\tau} Q(r_S, y_S, \tau) \delta \left( t - \tau - \frac{r}{c_0} \right) \frac{dr_S dy_S}{r} d\tau \\
 &\approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} \int_{\tau} Q(r_S, y_S, \tau) \delta \left( t - \tau - \frac{r_M}{c_0} - \frac{r_S}{c_0} \right) dr_S dy_S d\tau \\
 &\approx \frac{c_0}{4\pi r_M} \int_{S(S)} \int_{\tau} Q(r_M - c_0(t - \tau), y_S, t) dy_S d\tau.
 \end{aligned}$$

On compare ensuite la variation spatiale du terme source  $Q$  dans la direction de l’observateur  $r_M$  sur la distance  $c_0\tau$  :  $c_0\tau/\ell \approx c_0\ell/u/\ell \approx 1/M \ll 1$ . Ainsi :

$$p(M, t) = \frac{c_0}{4\pi r_M} \int_{S(S)} \int_{\tau} Q(r_M - c_0t, y_S, t) dy_S d\tau.$$

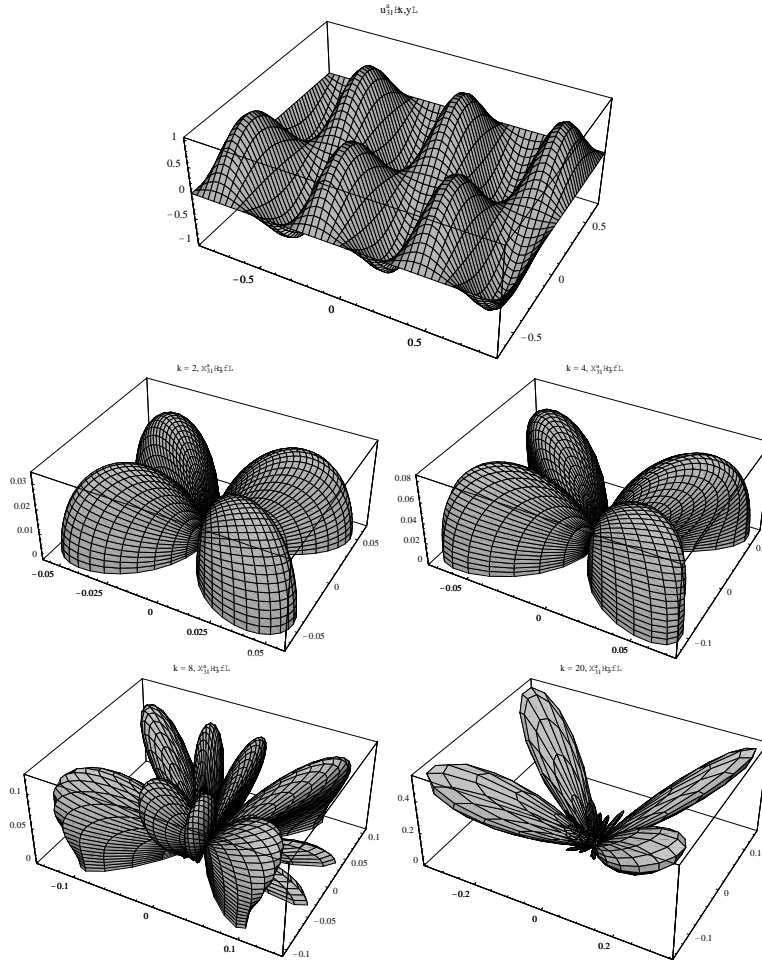


FIGURE 1.15 – Déformée et directivité “antisymétrique” pour  $m = 3$ ,  $n = 1$  et pour  $k = 2, 4, 8$  et  $20 \text{ m}^{-1}$

### Cas de la source de débit

On a pour une source de débit  $Q(S, t) = \rho_0 \partial Q_m(S, t) / \partial t \approx \rho_0 (v/\ell) / (\ell/v) \approx \rho_0 (v/\ell)^2$ . Si la source est spatialement compacte :

$$p(M, t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \int_{V(S)} Q\left(S, t - \frac{r_M}{c_0}\right) dS \approx \frac{1}{r_M} \rho_0 \frac{v^2}{\ell^2} \ell^3 \approx \frac{\rho_0 c_0^2 \ell}{r_M} M^2.$$

La pression rayonnée est proportionnelle à  $\rho_0 v^2$  et on a :

$$p(M, t) \approx \frac{1}{4\pi r_M} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(S)} Q_m\left(S, t - \frac{r_M}{c_0}\right) dS.$$

Le rayonnement est contrôlé par les variations temporelles de la source. Si la source est spatialement non compacte on a :

$$p(M, t) \approx \frac{c_0}{4\pi r_M} \int_S \int_\tau Q(r_M - c_0 t, y_S, t) dy_S d\tau \approx \frac{c_0}{r_M} \rho_0 \frac{v^2}{\ell^2} \ell^2 \frac{\ell}{v} \approx \frac{\rho_0 c_0^2 \ell}{r_M} M.$$

La pression rayonnée est proportionnelle à  $\rho_0 c_0 v$  et on a avec  $\partial/\partial t = \partial/\partial r_S \partial r_S/\partial t = -c_0 \partial/\partial r_S$  :

$$p(M, t) = -\frac{c_0^2}{4\pi r_M} \int_S \int_\tau \frac{\partial}{\partial r_S} Q(r_M - c_0 t, y_S, t) dy_S d\tau,$$

Le rayonnement est contrôlé par les variations spatiales de la source dans la direction de l’observateur.

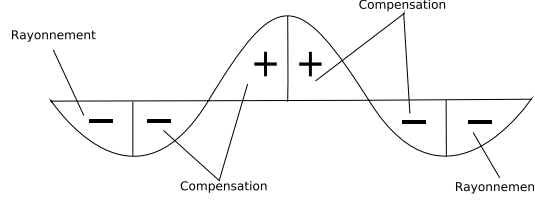


FIGURE 1.16 – Explication du phénomène de compensation

### 1.7.2 Sources en mouvement uniforme et non uniforme

Considérons une source de masse ponctuelle localisée à l'instant  $t$  en un point  $S(t)$ . La pression qu'elle rayonne est donnée par :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial}{\partial t} (Q(t) \delta(M - S(t))).$$

Il est immédiat d'en déduire que :

$$p(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{Q(\tau) \delta(M - S(\tau)) \delta(t - \tau - d(M, M')/c_0)}{4\pi d(M, M')} dM' d\tau.$$

D'où :

$$p(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{Q(\tau) \delta(t - \tau - d(M, S(\tau))/c_0)}{4\pi d(M, S(\tau))} d\tau.$$

Pour calculer cette intégrale, nous devons tout d'abord calculer l'intégrale suivant une direction particulière  $x_\alpha$ ,  $I = \int_{x_\alpha} \phi(\vec{x}) \delta(f(\vec{x})) dx_\alpha$ . D'après ce que nous connaissons des propriétés de la distribution de Dirac, il est évident que seuls les points pour lesquels  $f(\vec{x}) = 0$  contribueront à l'intégrale  $I$ . Pour calculer  $I$ , commençons par effectuer un changement de variable de  $x_\alpha$  vers  $f(\vec{x})$ . Nous aurons, les variables  $x_i$  sont évidemment constantes pour  $i \neq \alpha$ ,  $dx_\alpha = df(\vec{x}) / (\partial f(\vec{x}) / \partial x_\alpha)$ .  $I$  devient donc  $I = \int_{f(\vec{x}) \geq 0}^{\phi(\vec{x}) \delta(f(\vec{x}))} df(\vec{x}) / (\partial f(\vec{x}) / \partial x_\alpha)$ , où les inégalités qui apparaissent dans les bornes de l'intégrale doivent être choisies en suivant le signe de  $(\partial f(\vec{x}) / \partial x_\alpha)$ . Il est alors évident que l'on a :

$$I = \int_{f(\vec{x}) < 0}^{f(\vec{x}) > 0} \phi(\vec{x}) \delta(f(\vec{x})) d \frac{f(\vec{x})}{\left| \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_\alpha} \right|} = \sum \left\{ \frac{\phi(\vec{x})}{\left| \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_\alpha} \right|} \right\}_{\vec{x}=\vec{x}_\alpha^*}. \quad (1.1)$$

où la somme est étendue à tous les zéros de  $f(\vec{x})$  notés  $\vec{x}_\alpha^*$  (c'est-à-dire tels que  $f(\vec{x}_\alpha^*) = 0$ ). On applique ce résultat à  $\int Q(t) \delta(f(t)) = \sum_{n=1}^N Q(\tau_n^*) / |\partial f(\tau) / \partial \tau|$ . La somme est étendue aux  $N$  zéros de  $f(\tau)$  qui sont notés  $\tau_n^*$ , avec  $f(\tau) = t - \tau - d(M, S(t))/c_0$ . On a :

$$\partial f(\tau) / \partial \tau = -1 + \frac{x_i - x_{si}}{d(M, S(t)) c_0} \frac{\partial x_{si}}{\partial \tau} = -1 + M_S,$$

où  $M_S$  est basé sur la composante de la vitesse de la source dans la direction de l'observateur. D'où :

$$p(M, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi d(M, S(t)) |1 - M_S|} \right).$$

$\tau_n^*$  correspond au temps d'émission du son reçu par l'observateur au temps  $t$ . à ce moment-là, la source est en  $S(\tau_n^*)$  et  $\tau_n^*$  est la solution de  $c_0(t - \tau_n^*) = d(M, S(\tau_n^*))$ . Par dérivation nous obtenons  $c_0(1 - \partial \tau_n^* / \partial t) = -(x_i - x_{si}) / (d(M, S(t)) c_0) = \partial x_{si} / \partial \tau \partial \tau_n^* / \partial t$ . Soit  $\partial \tau_n^* / \partial t = 1 / (1 - M_S)$ . Ceci

illustre la relation entre le temps de la source  $\tau_n^*$  et le temps de l'observateur  $t$  (effet Doppler). Supposons maintenant que la source soit d'amplitude constante  $Q(t) = Q_0$ . On a ainsi :

$$p(M, t) = \frac{Q_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{d(M, S(t)) |1 - M_S|} \right).$$

En champ lointain ( $d(M, S(t)) \gg 1$ ), on a :

$$p(M, t) \approx \frac{Q_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\partial M_S}{\partial t} \frac{1}{d(M, S(t)) |1 - M_S|^3}.$$

Pour une source proche de l'origine qui se déplace à faible nombre de Mach, on a  $p(M, t) \approx Q_0/(4\pi c_0) \partial \bar{V}_S / \partial t \cdot \bar{r}_M / r_M^2$ . Cette relation montre qu'un monopole constant (c'est-à-dire sans fluctuations temporelles de son débit) peut créer un champ dipolaire lorsqu'il est en mouvement non uniforme. Lorsque le monopole est en mouvement uniforme suivant l'axe  $x$  à vitesse  $V_x$ , la contribution principale en champ lointain vient de la dérivation temporelle de  $Q(\tau_n^*)$ . On a :

$$p(M, t) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial Q(\tau_n^*) / \partial t}{4\pi d(M, S(t)) |1 - M_x \cos \theta|^2 \operatorname{sgn}(1 - M_x \cos \theta)} \right). \quad (1.2)$$

où  $\cos \theta = (x - x_S(\tau^*)) / d(M, S(\tau^*))$  est l'angle entre la position de l'observateur et l'axe  $x$ , mesuré à partir de la position de la source au temps d'émission  $\tau^*$  et  $M_x = V_x / c_0$ . Alors qu'un monopole au repos émet un signal omnidirectionnel, le facteur  $|1 - M_x \cos \theta|^2$  indique qu'un monopole en mouvement subsonique émet un champ plus intense vers l'avant que vers l'arrière.

Le temps d'émission  $\tau^*$  se calcule alors aisément en résolvant l'équation implicite :

$$c_0(t - \tau^*) = \sqrt{(x - V_x \tau^*)^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce qui donne :

$$\tau^* = \frac{c_0 t - M_x x \pm \sqrt{(x - V_x t)^2 + (1 - M_x^2)(y^2 + z^2)}}{c_0(1 - M_x^2)}.$$

Seules les solutions pour lesquelles  $\tau^* < t$  et  $\tau^* \in \mathbb{R}$  ont un sens. Pour  $M_x < 1$ , seul le signe inférieur conduit à une solution physique et quand  $M_x > 1$ , il n'y a de solution que dans le cône de Mach  $\sqrt{(1 - M_x^2)(y^2 + z^2)} < V_x t - x$ . Il est souvent utile d'introduire un repère de coordonnées  $R, \Theta$  basé sur le temps de réception, avec  $\cos \Theta = (x - V_x t) / R$  et  $R = \sqrt{(x - V_x t)^2 + y^2 + z^2}$ . Alors :

$$\tau^* = t - \frac{R}{c_0(1 - M_x^2)} \left( M_x \cos \Theta \mp \sqrt{1 - M_x^2 \sin^2 \Theta} \right).$$

## Effet Doppler

Il est d'expérience courante d'observer que le son émis par un objet se rapprochant d'un récepteur est plus aigu et plus grave lorsqu'il s'éloigne. Cet effet apparaît aussi lorsque l'onde se réfléchit sur un objet en mouvement par rapport à l'émetteur/récepteur (principe des cinémomètres et autres radars).

Supposons que l'onde se déplace dans un milieu au repos avec une célérité  $c_0$  (référentiel  $R_0$ ), que la vitesse de la source est  $v_s$  (référentiel  $R_s$ ) et que celle du récepteur est  $v_r$  (référentiel  $R_r$ ). Pour simplifier, on considère que l'émetteur et le récepteur se déplacent sur une ligne droite.  $f_0$  est la fréquence d'émission d'impulsions dans le référentiel de la source.

En une période  $T_0 = 1/f_0$ , l'impulsion émise par la source a parcouru une distance  $d_0 = c_0 T_0$  dans  $R_0$ . Comme durant  $T_0$ , la source s'est déplacée de  $v_s T_0$ , la distance qui sépare deux impulsions dans  $R_0$  est  $d_s = (c_0 - v_s) T_0$ .



Calculons le temps  $T_r$  qui sépare la réception de deux impulsions par le récepteur. Entre deux impulsions, le récepteur aura parcouru la distance  $v_r T_r$ , la deuxième impulsion aura parcouru la distance  $d_r = d_s + v_r T_r = c_0 T_r$  soit,  $T_r = d_s / (c_0 - v_r)$  et une fréquence reçue de  $f_r = 1/T_r = (c_0 - v_r) / d_s$ . Ainsi :

$$f_r = \frac{c_0 - v_r}{c_0 - v_s} f_0 = \frac{1 - v_r/c_0}{1 - v_s/c_0} f_0.$$

### Ondes de choc

Quand un avion vole plus vite que le mur du son (à vitesse supersonique  $V$ ), les perturbations sonores qu'il émet (par exemple par son fuselage qui en prenant la place de l'air quand il avance comprime celui-ci) se propagent à la vitesse du son, soit plus lentement que celui-ci. Le son émis par l'avion est donc compris à l'intérieur d'un cône appelé cône de Mach. L'angle au sommet de celui-ci est donné par une formule trigonométrique simple :  $\sin \theta = c_0 / V$ , l'inverse du nombre de Mach. Pour l'histoire, Doppler a établi cet effet par le raisonnement géométrique suivant : par rapport à la position actuelle de l'avion à  $t = 0$ , repérer sur la trajectoire horizontale de l'avion sa position à l'instant  $-\Delta t$ , donc à la distance  $-V\Delta t$ . Le son émis par l'avion se propageant à la vitesse du son  $c_0$ , il est donc compris dans un cercle centré sur la position  $-V\Delta t$ , et de rayon  $c_0\Delta t$ . Recommencez le dessin à l'instant  $-2\Delta t$ , puis  $-3\Delta t$ ,  $\dots$ ,  $-n\Delta t$ ,  $\dots$ ; en traçant tous ces cercles on voit que le son est compris à l'intérieur d'un cône, enveloppe de tous les cercles sonores. Cet effet a été observé expérimentalement par Mach en 1877 par effet Schlieren sur un petit projectile.

L'onde de choc entendue au sol au passage d'un avion supersonique est entendue par un observateur fixe au sol, lorsqu'il est traversé par le cône de Mach mobile attaché à l'avion supersonique. C'est un peu l'analogie d'un sillage de bateau en forme de V à la surface de l'eau. Ainsi, un observateur au sol n'entend qu'une seule fois un bang sonique, mais un observateur situé un peu plus loin le long de la trajectoire de l'avion entendra le même bang sonique mais un peu plus tard, le temps pour l'avion (et son cône de Mach) de parcourir la distance séparant les 2 observateurs. Et ceci se produit pendant toute la phase de vol supersonique, et pas seulement quand l'avion franchit le "mur du son" c'est à dire passe à Mach 1. La notion de "mur du son" n'existe pas. Le bang sonique est produit pendant toute la phase de vol supersonique. À l'intérieur de l'avion, un passager est fixe par rapport au cône de Mach et donc jamais traversé par celui-ci et il n'entend rien de particulier.

En pratique, À Mach 1 exactement (et même un peu au-dessus), le bang sonique n'est pas entendu au sol. En effet l'atmosphère étant plus froide en altitude qu'au sol, le son ne se propage pas exactement en ligne droite, mais tend à être dévié vers le haut quand il passe d'une région froide (où la vitesse du son est un peu plus faible) à une région plus chaude (vitesse du son plus élevée). C'est le phénomène de réfraction, analogue aux mirages qui se produisent en optique dans les déserts. Comme à Mach 1, le cône de Mach est très ouvert, les rayons acoustiques, ou chemin suivi par le son, partent perpendiculairement au cône, donc quasiment horizontalement, et sont tout de suite déviés vers le haut sans atteindre le sol. Pour entendre le bang à ces vitesses très proches de Mach 1, il faut que l'avion vole très près du sol. C'est ce qu'on voit et entend sur certaines photos ou vidéos spectaculaires où l'on visualise un nuage de condensation en forme de cône. Mais en usage normal, un avion vole beaucoup plus haut ! A plus haute vitesse, les rayons partent plus inclinés vers le bas (le cône de Mach est plus refermé), restent déviés mais pas suffisamment pour ne pas toucher le sol. Le bang sonique (au sol) se produit pour des Mach de l'ordre de 1,15 environ, mais cette valeur est variable et dépend des conditions météorologiques locales (température et vent) et de l'altitude de vol de l'avion.

Le terme de "mur du son" a été forgé dans les années 1940, et l'idée a été popularisée suite aux déboires des premières tentatives pour approcher ou dépasser Mach 1. Quand un avion vole, l'écoulement de l'air tend à augmenter de vitesse au-dessus de l'aile, l'extrados, et à diminuer au-dessous, l'intrados. À partir de Mach 0,72, une partie de l'air au-dessus des ailes va plus vite que la vitesse du son et une poche d'écoulement supersonique se produit au-dessus de l'aile et plus l'avion vole vite, tout en restant globalement subsonique, plus cette poche supersonique est importante. Le retour

plus loin à l'arrière de l'aile à une zone subsonique se fait par une onde de choc localisée au dessus de l'aile. Un tel régime d'écoulement est appelé transsonique. La croissance de cette poche s'accompagne d'une augmentation de la traînée de l'avion, et c'est cette brusque augmentation de la traînée, donc de la consommation de carburant, qui a conduit aux difficultés des premiers vols supersoniques. En outre, quand on passe du régime subsonique au régime supersonique, le point d'application de la force de portance se déplace ce qui tend à déstabiliser l'avion car la portance n'est plus appliquée au même point que la force de gravité. Sur Concorde, pour rétablir l'équilibre, on déplaçait le carburant entre les différents réservoirs pour que le centre de gravité suive le centre de portance.

Il n'y a pas de "mur du son" physique. Le passage de la vitesse subsonique à la vitesse supersonique ne se fait pas en franchissant un mur invisible, ce qui produirait une explosion perçue comme le fameux bang sonique. Tout cela résulte de la conjonction

1. des difficultés et accidents rencontrés dans les années 1940 en tentant d'approcher puis dépasser la vitesse du son, et donc la découverte du régime transsonique (parfaitement maîtrisé aujourd'hui par tous nos avions de ligne à réaction) qui a donné l'idée de "mur du son" ;
2. de la notion de bang sonique, phénomène acoustique lui lié au régime pleinement supersonique, produit pendant toute la phase de vol supersonique, et qui a été perçu très négativement dans les années 1960 notamment suite à certains abus des militaires.

Les deux phénomènes, différents mais liés, se sont conjugués pour donner l'idée d'un mystérieux "mur" à Mach 1 dont le franchissement créerait une explosion formidable !!!

Le champ de pression d'une source en mouvement qui est donné par l'équation (1.2) est évidemment singulier en un point  $M$  tel que  $M_x \cos \theta = 1$ , situé sur le cône de Mach donné par la relation  $\sqrt{(1 - M_x^2)(y^2 + z^2)} = V_x t - x$ . On montre que le potentiel des vitesses  $\phi(M, t)$  de l'onde de Mach ( $-\rho_0 \partial \phi(M, t) / \partial t = p(M, t)$ ) est donné en champ lointain, pour une source  $Q(S, \tau) = q(x, \tau) \delta(y) \delta(z)$  de dimension finie et qui commence à  $t = 0$ , par :

$$\phi(M, t) = -\frac{U_x}{4\pi\rho_0 r_M} \int_0^t q(0, \tau) d\tau.$$

Ce qui signifie que toute l'histoire de la source est entendue par un observateur lointain en un seul "bang".

## Chapitre 2

# Vibrations de plaques minces

Nous supposons dans toute la suite que la dépendance temporelle est monochromatique de la forme  $e^{-i\omega t}$ . Pour alléger l'écriture, nous simplifions dans les équations cette dépendance. Nous ne nous intéressons dans ce chapitre qu'aux vibrations de flexion des plaques de dimensions infinies et finies. Les mouvements longitudinaux, du fait de la complexité des équations -plus précisément un système d'équations couplées- sortent du cadre de ce cours; de fait, les méthodes employées sont proches de celles utilisées pour la résolution de l'élasticité tridimensionnelle. Nous commençons par une étude des vibrations d'une plaque infinie par l'intermédiaire du calcul de la solution générale et du noyau de Green. Puis nous nous intéressons au problème de la plaque de dimension finie. Après avoir donné un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème aux limites, nous présentons quelques méthodes analytiques dans les cas simples de plaques rectangulaires et circulaires. Nous donnons une solution au problème d'une plaque de forme quelconque ou soumise à des conditions aux limites non uniformes par une méthode intégrale basée sur la représentation de Green de l'équation des plaques. Nous terminerons ce chapitre par l'application d'une méthode analytique au calcul de la réponse d'une plaque rectangulaire appuyée excitée par une couche limite turbulente.

### 2.1 équations de base du modèle de plaque de Kirchhoff

La théorie simplifiée des plaques minces de Kirchhoff est basée sur Les relations cinématiques de Kirchhoff-Love qui sont destinées à la fois à approcher les équations de l'élasticité tridimensionnelle mais aussi à éliminer le comportement interne du matériau. Ces approximations imposent à une tranche de matière transverse à la surface moyenne de se comporter comme un solide indéformable. Le mouvement de la structure se déduit alors de champs de rotation et de translation. Ces champs traduisent les deux phénomènes qui régissent l'équilibre des corps minces. Le champ de rotation traduit l'effet de flexion et le champ de translation l'effet de membrane qui est lié aux mouvements propres de la surface moyenne. En outre, nous supposons que le matériau qui constitue les coques est homogène et isotrope et enfin que la relation déformation-contrainte est donnée par la loi de Hooke. Dans ce cadre, les hypothèses de Kirchhoff-Love sont :

- épaisseur faible devant les autres dimensions ;
- déplacements et déformations sont suffisamment petits pour pouvoir négliger les termes de second ordre ;
- le cisaillement transverse est faible devant les efforts normaux ;
- une tranche de matière transverse à la surface moyenne non déformée se comporte comme un solide indéformable.

A ces hypothèses nous rajoutons que l'épaisseur doit être faible devant les longueurs d'onde (hypothèse basse fréquence). Une conséquence importante de l'approximation corps mince vient du fait que l'effet de flexion est traduit par un opérateur du quatrième ordre. Cet opérateur (généralement un bi-Laplacien) régit le comportement du champ de déplacement dans la direction dans laquelle la

structure est mince (comme l'épaisseur) alors que l'effet de membrane est traduit par un opérateur du second ordre (similaire à celui des équations de l'élasticité tridimensionnelle). Nous voyons donc que si l'approximation corps mince simplifie le problème en diminuant le nombre d'inconnues, une "complexification" des équations est introduite par l'intermédiaire d'opérateurs de degré plus élevé.

Nous ne donnons pas les détails des calculs. Mais ceux-ci conduisent à décrire le déplacement de la surface moyenne (ou neutre pour les faibles amplitudes)  $u(M)$ , où  $M$  est un point de cette surface comme la solution du problème suivant :

$$\Delta^2 u(M) - (\omega^2 \rho_p h) / Du(M) = 0,$$

où  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$  est la rigidité en flexion de la plaque,  $E$  son module d'Young,  $\nu$  son coefficient de Poisson,  $\rho_p$  sa masse volumique et  $h$  son épaisseur. On posera par la suite  $k = k_p(\omega) = \sqrt[4]{(\omega^2 \rho_p h) / D}$  est le nombre d'onde dans la plaque. Cette égalité, qui relie fréquence et nombre d'onde dans un milieu matériel, porte le nom de relation de dispersion. Si la plaque est de dimension finie, les conditions aux limites sont données par :

— plaque libre :

$$-D(\Delta u - (1 - \nu)\partial_l^2 u) = 0 \text{ et } -D(\partial_n \Delta u + (1 - \nu)\partial_l(\partial_n \partial_l u)) = 0 ;$$

— plaque appuyée :

$$u = 0 \text{ et } -D(\Delta u - (1 - \nu)\partial_l^2 u) = 0 ;$$

— plaque encastrée :

$$u = 0 \text{ et } \partial_n u = 0.$$

Le couple de conditions  $\partial_n u = 0$  et  $-D(\partial_n \Delta u + (1 - \nu)\partial_l(\partial_n \partial_l u)) = 0$ , parfois appelé dans la littérature encastrement guidé, n'a pas une signification physique claire. On notera que  $\partial_n = \bar{\nabla} \cdot \vec{n}$  et  $\partial_l = \bar{\nabla} \cdot \vec{l}$  représentent les dérivées suivant la normale et la tangente à la frontière qui dépendent de la géométrie de celle-ci comme une plaque circulaire, rectangulaire, ovale ou de forme quelconque. Il est important de remarquer que dans le cas général, les conditions aux limites de plaque appuyée ou libre font apparaître des dérivées qui dépendent du coefficient de Poisson, ceci correspond à une "dérivée oblique". Cette notion, un peu technique, traduit le fait que la plaque est un milieu tridimensionnel ramené à une surface dans lequel les déformations locales subies par la frontière dans une direction modifient la géométrie globale du milieu élastique (c'est l'effet du coefficient de Poisson). Du point de vue historique, les conditions aux limites exactes décrites ci-dessus ont été établies de manière rigoureuse pour la première fois en 1816 par la mathématicienne Sophie Germain et l'équation ci-dessus devrait s'appeler en toute rigueur l'équation de Kirchhoff-Germain.

Considérons le repère cartésien usuel  $(O, x, y, z)$ . La plaque occupe le plan  $z = 0$ .  $u(x, y)$  est le déplacement normal de cette plaque. Comme le matériau qui constitue la plaque est homogène et isotrope, il est évident que les propriétés de la plaque possèdent une symétrie circulaire par rapport à l'origine des coordonnées. Le déplacement de la plaque possède évidemment les mêmes propriétés. La solution ne dépend que de la distance à l'origine. En coordonnées polaires  $(O, r, \theta)$ , le Laplacien est donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}.$$

L'équation des plaques  $\Delta^2 u(r, \theta) - (\omega^2 \rho_p h) / Du(r, \theta) = 0$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + (ik_p)^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + k^2 \right) u(r, \theta) = 0$$

La vitesse de groupe (qui caractérise la propagation de l'énergie) est donnée par  $v_g(\omega) = d\omega / dk_p(\omega)$ . De  $k_p^2(\omega) = \sqrt{(\rho_p h) / D} \omega$ , on tire par différentiation  $2k_p dk_p = \sqrt{(\rho_p h) / D} d\omega$  et ainsi  $v_g(\omega) = 1 / (dk_p(\omega) / d\omega)$ .

Soit  $v_g(\omega) = 2\sqrt{\omega} \sqrt[4]{D/(\rho_p h)}$ . Les plaques minces sont des milieux dispersifs dans lesquels la vitesse de propagation des ondes de flexion dépend de la fréquence (subsoniques en basse fréquence, soniques en moyenne fréquence ou supersoniques en haute fréquence). Ceci a des conséquences importantes sur tout ce qui a trait au rayonnement : toute plaque possède une fréquence au-delà de laquelle les ondes qui s'y propagent seront parfaitement couplées avec le fluide externe.

Rappelons que la vitesse de phase est donnée par  $v_\phi(\omega) = \omega/k_p(\omega)$  soit  $v_\phi(\omega) = v_g(\omega)/2$ .

### 2.1.1 Solution générale

L'équation des plaques se décompose en un produit de deux opérateurs de Helmholtz, l'un à nombre d'onde réel, l'autre à nombre d'onde complexe. Il est évident que la solution générale de cette équation est une combinaison linéaire des deux solutions générales des équations de Helmholtz correspondantes.

Cherchons la solution  $u_1$  de l'équation à nombre d'onde réel

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial u(r, \theta)}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{r^2 \partial \theta^2} + k_p^2 u(r, \theta) = 0$$

sous forme d'un produit de Laplace  $u_1(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial R(r)\Theta(\theta)}{r \partial r} + \frac{\partial^2 R(r)\Theta(\theta)}{r^2 \partial \theta^2} + k_p^2 R(r)\Theta(\theta) &= 0 \\ \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)} + k_p^2 &= 0 \\ r^2 \left\{ \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + k_p^2 \right\} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} &= 0. \end{aligned}$$

De lé, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Theta''(\theta) + \alpha^2 \Theta(\theta) &= 0 \\ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left( k_p^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} \right) R(r) &= 0. \end{aligned}$$

La solution de la première équation est une combinaison linéaire d'exponentielles complexes. En outre, il est évident que la solution est  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ , il est donc nécessaire de poser  $\alpha = n$ ,  $n$  entier. Nous reconnaissons dans la seconde équation une équation de Bessel d'ordre  $n$ . Sa solution est une fonction de Bessel d'indice entier. Comme la solution du problème est régulière, nous devons choisir la solution régulière :  $J_n$ . Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= A_{1n} e^{in\theta} + A_{2n} e^{-in\theta} \\ R(r) &= B_n J_n(k_p r). \end{aligned}$$

Soit, si  $A_n$  est une constante quelconque :

$$u_1(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(k_p r) e^{in\theta}.$$

La deuxième famille de solution s'obtient si nous remplaçons le nombre d'onde  $k_p$  par  $ik_p$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n J_n(ik_p r) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n i^{-n} I_n(k_p r) e^{in\theta}. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation des plaques est donc donnée par

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_p r) + B_n I_n(k_p r)\} e^{in\theta}.$$

Notons que le comportement la solution générale des plaques est analogue à celle des poutres qui est somme d'une fonction oscillante (rôle joué par la fonction de Bessel  $J_n$ ) et d'une fonction à croissance exponentielle (rôle joué par la fonction de Bessel  $I_n$ ).

Il est facile d'exprimer cette solution générale en coordonnées cartésiennes  $(0, x, y)$ . Comme précédemment, il convient de procéder à la décomposition de l'opérateur des plaques en deux opérateurs de Helmholtz. Nous avons

$$\left(\Delta + (\imath k_p)^2\right) \left(\Delta + k_p^2\right) u(x, y) = 0$$

ainsi  $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$  où

$$\left(\Delta + k^2\right) u_1 = 0, \left(\Delta + (\imath k_p)^2\right) u_2 = 0.$$

Calculons  $u_1$ . Pour ce faire, décomposons  $u_1$  sous forme d'un produit de Laplace :  $u_1(x, y) = X(x)Y(y)$ . Nous obtenons :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0,$$

comme  $k$  est une constante indépendante de  $x$  et de  $y$ , il est évident que nous avons

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\alpha^2, \alpha \in \mathcal{C} \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\beta^2, \beta \in \mathcal{C} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= k_p^2. \end{aligned}$$

$X(x)$  et  $Y(y)$  sont solutions d'une équation de Helmholtz monodimensionnelle. Il est donc évident que nous avons :

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\imath\alpha x} + B_1 e^{-\imath\alpha x} \\ Y(y) &= C_1 e^{\imath\alpha y} + D_1 e^{-\imath\alpha y} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= k^2. \end{aligned}$$

$u_2$  se calcul de la même manière en remplaçant  $k_p$  par  $\imath k_p$ . Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_1 e^{\imath(\alpha x + \beta y)} + B_1 e^{\imath(\alpha x - \beta y)} + C_1 e^{-\imath(\alpha x + \beta y)} + D_1 e^{-\imath(\alpha x - \beta y)} \\ &\quad + A_2 e^{\alpha x + \beta y} + B_2 e^{\alpha x - \beta y} + C_2 e^{-\alpha x + \beta y} + D_2 e^{-\alpha x - \beta y} \\ &= A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + B_1 \sin \alpha x \cos \beta y + C_1 \cos \alpha x \sin \beta y + D_1 \cos \alpha x \cos \beta y \\ &\quad + A_2 \sinh \alpha x \sinh \beta y + B_2 \sinh \alpha x \cosh \beta y \\ &\quad + C_2 \cosh \alpha x \sinh \beta y + D_2 \cosh \alpha x \cosh \beta y, \end{aligned}$$

où  $\alpha^2 + \beta^2 = k_p^2$ . Notons que lé encore, la solution générale est composée de fonctions oscillantes et de fonctions à comportement exponentiel.

### 2.1.2 Noyau de Green

Cherchons maintenant  $G(M, M_0)$  telle que

$$D\Delta_M^2 G(M, M_0) - Dk_p^4 G(M, M_0) = \delta_{M_0}(M),$$

où  $\Delta_M^2$  indique que le bi-Laplacien agit sur la variable  $M$ , et qui satisfait une condition de conservation de l'énergie, le principe d'absorption limite. Cherchons  $G(M, M_0)$ , limite de  $G_\epsilon(M, M_0)$  telle que

$$\Delta_M^2 G_\epsilon(M, M_0) - (k_p + i\epsilon)^4 G_\epsilon(M, M_0) = \frac{1}{D} \delta_{M_0}(M).$$

Comme pour la solution générale, il est intuitif de remarquer que le noyau de Green de l'équation des plaques doit être une combinaison linéaire particulière des noyaux de Green qui correspondent aux deux équations de Helmholtz à nombre d'onde réel et imaginaire pur  $H_0(k_p r)$  et  $H_0(ik_p r)$ .

La fonction de Green se calcule à nouveau par transformation de Fourier directe et inverse. Le noyau correspondant se déduit simplement de la fonction en remplaçant la distance à l'origine  $M$  par la distance  $MM_0$ . Les transformées de Fourier directe et inverse d'une fonction bidimensionnelle purement radiale  $f(r)$  sont données par

$$\begin{aligned} \hat{f}(\zeta) &= 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) J_0(2\pi\zeta r) r dr \\ f(r) &= \pi \int_{e^{i\pi}\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) H_0(2\pi\zeta r) \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, si  $r$  est la distance entre  $M$  et l'origine :

$$16\pi^4 \zeta^4 \hat{G}_\epsilon(\zeta) - (k_p + i\epsilon)^4 \hat{G}_\epsilon(\zeta) = \frac{1}{D}.$$

Soit

$$\begin{aligned} D\hat{G}_\epsilon(\zeta) &= \frac{1}{16\pi^4 \zeta^4 - (k_p + i\epsilon)^4} \\ &= \frac{1}{2(k_p + i\epsilon)^2} \left( \frac{1}{4\pi^2 \zeta^2 - (k_p + i\epsilon)^2} + \frac{-1}{4\pi^2 \zeta^2 + (k_p + i\epsilon)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(k_p + i\epsilon)^2} \left( \frac{1}{4\pi^2 \zeta^2 - (k_p + i\epsilon)^2} + \frac{-1}{4\pi^2 \zeta^2 + (k_p + i\epsilon)^2} \right) \\ &= D\hat{G}_1(\zeta) + D\hat{G}_2(\zeta). \end{aligned}$$

Calculons l'inverse de  $\hat{G}_1(\zeta)$  par transformée de Fourier inverse,  $\hat{G}_2(\zeta)$  s'en déduit immédiatement.

$$G_1(r) = \frac{\pi}{2(k_p + i\epsilon)^2} \int_{e^{i\pi}\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 \zeta^2 - (k_p + i\epsilon)^2} H_0(2\pi\zeta r) \zeta d\zeta.$$

Calculons cette intégrale par la méthode des résidus sur le contour suivant

La fonction à intégrer ne possède que deux pôles simples  $2\pi\zeta = \pm(k_p + i\epsilon)$  de partie imaginaire non nulle. Le contour choisi ne contient que le pôle  $2\pi\zeta = k_p + i\epsilon$ . Le théorème des résidus s'applique sans difficulté et nous obtenons

$$G_1(r) = \frac{i}{8(k_p + i\epsilon)^2} H_0((k_p + i\epsilon)r).$$

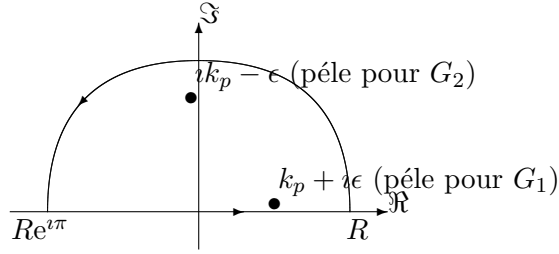


FIGURE 2.1 – Contour d'intégration

De même pour  $G_2$

$$G_2(r) = \frac{-i}{8(k_p + i\epsilon)^2} \text{H}_0(i(k_p + i\epsilon)r).$$

Par passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons finalement

$$G(r) = \frac{i}{8Dk_p^2} (\text{H}_0(k_p r) - \text{H}_0(ik_p r)).$$

L'expression du noyau de Green de l'équation des plaques est donc donnée par

$$G(M, M_0) = \frac{i}{8Dk_p^2} (\text{H}_0(k_p MM_0) - \text{H}_0(ik_p MM_0)).$$

Si nous utilisons les propriétés des fonctions de Bessel, nous obtenons une expression équivalente de ce noyau

$$G(M, M_0) = \frac{i}{8Dk_p^2} \left( \text{H}_0(k_p MM_0) + \frac{2i}{\pi} \text{K}_0(k_p MM_0) \right)$$

qui met en évidence la somme entre une fonction oscillante et une fonction à décroissance exponentielle. Étudions le comportement de ce noyau au voisinage de l'origine. Nous avons :

$$\begin{aligned} G(r) &\rightarrow \frac{i}{8Dk_p^2} \\ G'(r) &\rightarrow 0 \\ G''(r) &\rightarrow \text{ctte } \ln r \\ G'''(r) &\rightarrow \text{ctte } \frac{1}{r} \end{aligned}$$

La flèche de la plaque est bornée et sa pente à l'origine est nulle. Ce résultat traduit la symétrie de révolution que possède la plaque.

## 2.2 Vitesse de propagation des ondes mécaniques

La relation de dispersions de la plaque de Kirchhoff-Germain a montré que la vitesse de phase (propagation des ondes) et la vitesse de groupe (propagation de l'énergie) croissent avec la fréquence et peuvent donc que des ondes peuvent *a priori* se propager plus vite que les ondes mécaniques (longitudinale ou transversale)! Pour corriger cette absurdité, on doit tenir compte qu'aux hautes fréquences, les longueurs d'onde ont une dimension comparable à l'épaisseur et que le cisaillement transverse, négligé pour établir l'équation de Kirchhoff-Germain doit être pris en compte (ce qui



revient à considérer une plaque mince épaisse!). Pour ce faire, on utilise l'équation homogène de Timoshenko-Mindlin qui, à l'effet de flexion décrit par Kirchhoff, ajoute un effet de cisaillement. Afin de simplifier les calculs, on peut se contenter de raisonner sur le problème d'une plaque à une seule dimension (une poutre mince) :

$$\left(D\Delta - \frac{\rho_p h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\Delta - \frac{\rho_p}{\kappa^2 G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

où  $G = E/2(1 + \nu)$  est le module de cisaillement et  $\kappa$  est le coefficient de cisaillement avec  $\kappa^2 = \pi^2/12$  en dynamique ou  $5/6$  en statique. En régime harmonique, on a :

$$\left(D\Delta + \frac{\rho_p h^3}{12} \omega^2\right) \left(\Delta + \frac{\rho_p}{\kappa^2 G} \omega^2\right) u(x) - \rho_p h \omega^2 u(x) = 0$$

Comme précédemment, on cherche  $u(x) = \exp(ikx)$ , et on résout pour  $k$ . On part de

$$\begin{aligned} \left(-k^2 + \frac{\rho_p h^3}{12D} \omega^2\right) \left(-k^2 + \frac{\rho_p}{\kappa^2 G} \omega^2\right) - \frac{\rho_p h \omega^2}{D} &= 0 \\ k^4 - k^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1}{\kappa^2 G}\right) \rho_p \omega^2 + \rho_p^2 \omega^4 \frac{1-\nu^2}{\kappa^2 E G} - \frac{\rho_p h \omega^2}{D} &= 0 \end{aligned}$$

Qui est une équation bicarrée en  $k^2$  qui se résout aisément. On montre que

$$(k^\pm)^2 = \frac{\left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1}{\kappa^2 G}\right) \rho_p \omega^2 \pm \sqrt{\rho_p^2 \omega^4 \left(\frac{1-\nu^2}{\kappa^2 E G} - \frac{1}{\kappa^2 G}\right)^2 + 4 \frac{\rho_p h \omega^2}{D}}}{2},$$

on voit que pour  $\omega$ , on a au moins une racine réelle  $k^+$  et que pour  $\omega$  suffisamment grand, on a une seconde racine réelle  $k^-$ . La transition apparaissant pour  $\omega_0$  tel que  $(k^-)^2 = 0$ , soit

$$\omega_0^2 = \frac{12\kappa^2 G}{h^2 \rho_p}.$$

Or, on sait que

$$c_T^2 = \frac{E}{2\rho_p(1-\nu^2)} = \frac{G}{\rho_p}, \text{ et } c_L^2 = \frac{E(1-\nu^2)}{2\rho_p(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Soit  $\omega_0 = 12/h^2 \kappa^2 c_T^2$ . On définit la fréquence sans dimension  $\Omega = \omega h/c_T$ , et on a  $\Omega_0^2 = 12\kappa^2 = \pi^2$ . Soit  $\omega_0 h/c_T = \pi$ , avec  $c_T \approx 3000$  m/s (acier, verre, aluminium), on a  $f_0 = c_T/(2h) \approx 1500/h$  Hz.

En basse fréquence,  $\omega \rightarrow 0$ , on retrouve l'équation de Kirchhoff-Germain

$$(k^\pm)^4 \approx \pm \frac{\rho_p h \omega^2}{D}$$

En haute fréquence,  $\omega \rightarrow \infty$ ,

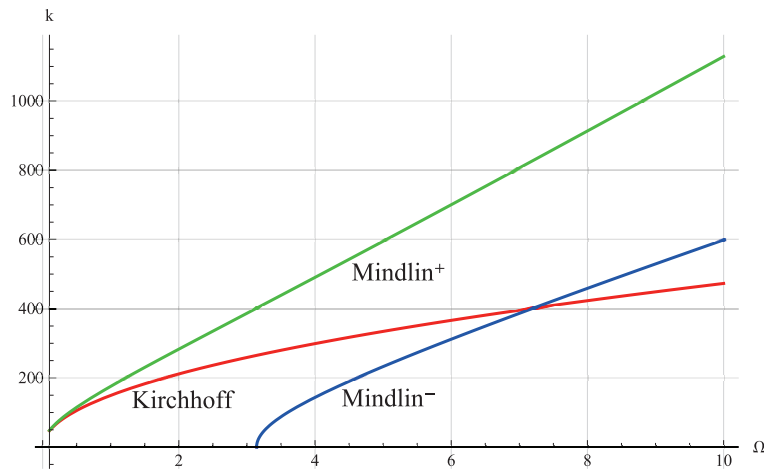
$$\begin{aligned} (k^+)^2 &\approx \rho_p \omega^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) = \frac{\omega^2 (1-\nu)^2}{c_t^2 (1-2\nu)} \\ (k^-)^2 &\approx \rho_p \omega^2 \left(\frac{2(1+\nu)}{\kappa^2 E}\right) = \frac{\omega^2}{c_t^2 \kappa^2} \end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'en haute fréquence, pour  $\nu \rightarrow 0$ ,  $k^+$  est le nombre d'onde des ondes de compression en milieu non borné  $k_L = \omega/c_L$ . Pour  $\nu = 1/6$ , on a  $k^+ \approx k_L$ . Enfin, pour tout  $\nu$ , on a  $k^- \approx 1, 2k_T$ .

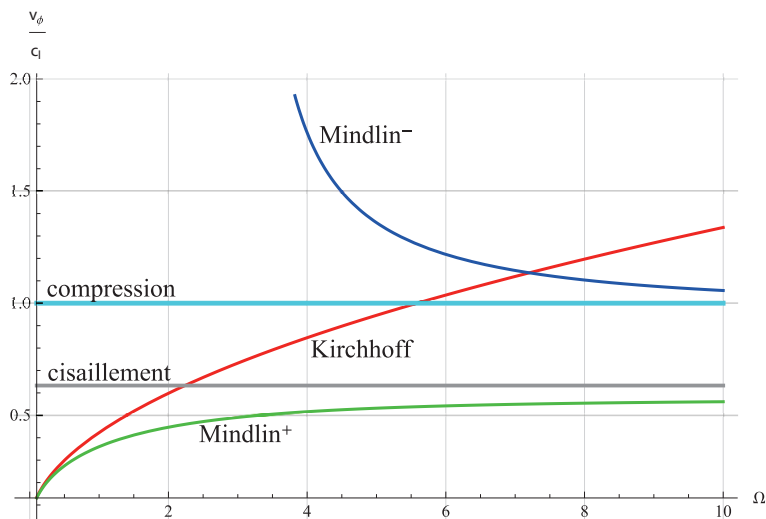
Si on définit  $f(\Omega) = \Omega \sqrt{(\pi^2(\nu - 1) + 24)^2 \Omega^2 - 96\pi^4(\nu - 1)}$ , on montre que les diverses expressions des vitesses sont :

$$\begin{aligned} v_\phi(\Omega) &= c_L \frac{h\sqrt{\Omega}}{\sqrt[4]{6(1-\nu)}} \\ v_g(\Omega) &= 2v_\phi(\Omega) \\ v_\phi^\pm(\Omega) &= c_L \frac{2\pi h\Omega}{\sqrt{(24 - \pi^2(\nu - 1))\Omega^2 \pm f(\Omega)}} \\ v_g^\pm(\Omega) &= c_L \frac{2\pi h f(\Omega) \sqrt{(24 - \pi^2(\nu - 1))\Omega^2 \pm f(\Omega)}}{\Omega(24(f(\Omega) + 24\Omega^2) - \pi^2(\nu - 1)(f(\Omega) + \pi^2(48 - (\nu - 1)\Omega^2) - 48\Omega^2))}. \end{aligned}$$

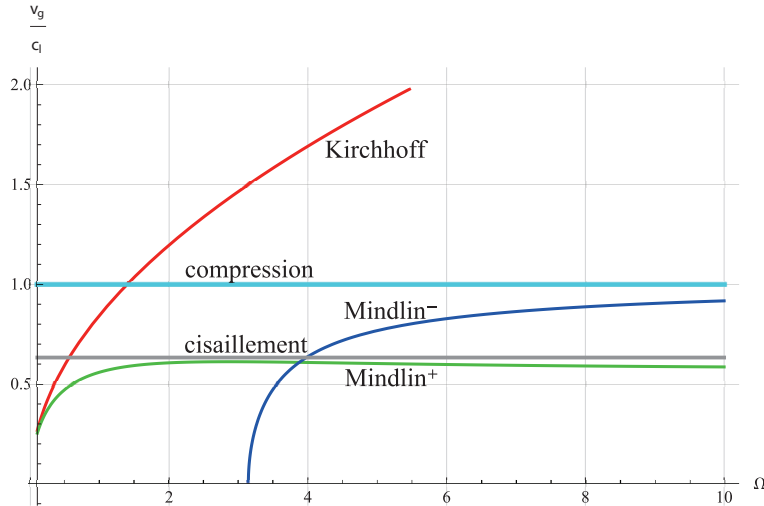
On présente dans les figures ci-dessous, les résultats obtenus pour les nombres d'onde, vitesses de phase et de groupe pour  $\nu = 1/6$  et  $h = 1$  cm.



Nombres d'onde pour les plaques minces de Kirchhoff-Germain et de Timoshenko-Mindlin



Célérités de phase pour les plaques minces de Kirchhoff-Germain et de Timoshenko-Mindlin



Célérités de groupe pour les plaques minces de Kirchhoff-Germain et de Timoshenko-Mindlin

L'équation de Kirchhoff-Germain est "juste" jusqu'à environ  $f_0/3$ , ce qui, pour fixer les idées pour une plaque en acier de 5cm d'épaisseur est de l'ordre de 10 KHz. Cela correspond à une longueur d'onde  $\lambda = c_T/f \approx 0,3$  m soit une longueur d'onde comparable à l'épaisseur. L'équation de Timoshenko-Mindlin est précise et décrit bien les effets volumiques avec l'apparition des deux types d'ondes naturelles des solides élastiques.

## 2.3 Plaque finie

À la différence des poutres, il n'existe que peu de configurations pour lesquelles il est possible d'exprimer de manière simple les fréquences et mode propres d'une plaque. Nous nous intéressons donc aux quelques cas pratiques pour lesquels il est possible de donner une solution analytique et proposons ensuite une méthode plus générale qui s'applique aux géométries quelconques.

Considérons le problème aux limites régité par l'équation des plaques et un couple admissible de conditions aux limites au bord du domaine. Nous avons le théorème :

1. Il existe une suite double dénombrable  $k_{mn}$  de valeurs  $k_p$  telles que le problème homogène possède un nombre fini de solutions  $u_{mn}$  linéairement indépendantes.  $k_{mn}$  est le nombre d'onde propre et  $u_{mn}$  est le mode propre correspondant. Si l'ordre de multiplicité de  $k_{mn}$  est supérieur à 1 (nombre d'onde propre multiple), nous obtenons des résultats similaires.
2. Si  $k_p = k_{mn}$ , le problème non homogène ne possède pas de solutions. Si  $k_p \neq k_{mn}$ , il existe une solution unique quelle que soit l'excitation.
3. La suite double  $u_{nm}$  peut toujours être rendue orthonormée et constitue une base sur laquelle la solution du problème non homogène peut être développée en série convergente.

### 2.3.1 Plaque rectangulaire à bord appuyés

Soit une plaque qui occupe le domaine du plan  $(O, x, y)$  défini par  $0 \leq x \leq \ell_x \cup 0 \leq y \leq \ell_y$ . Cette plaque est appuyée sur son contour. Les conditions aux limites  $u = 0$  et  $\Delta u - (1 - \nu)\partial^2 u = 0$  s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= 0 & \text{en } x = 0, \ell_x, \forall y \in ]0, +\ell_y[ \\
 u(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= 0 & \text{en } y = 0, \ell_y, \forall x \in ]0, +\ell_x[.
 \end{aligned}$$

Explicitons ces conditions aux limites. Le déplacement est cherché sous forme d'un produit de Laplace  $u(x, y) = U(x)V(y)$ . Comme les lignes de coordonnées sont parallèles aux axes du repère, ce produit permet de simplifier les conditions aux limites. Considérons, par exemple, les conditions aux limites en  $x = 0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} U(0)V(y) &= 0 \quad \forall y \in ]0, +\ell_y[ \\ \frac{\partial^2 U(0)V(y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U(0)V(y)}{\partial y^2} &= 0 \quad \forall y \in ]0, +\ell_y[ \end{aligned}$$

La première relation est réalisée si  $U(0) = 0$  ou si  $V(y) = 0$ . Comme la deuxième possibilité impliquerait que le déplacement soit nul en tout point de la plaque, nous devons forcément l'exclure. Donc la première équation nous donne  $U(0) = 0$ . La deuxième relation donne

$$U''(0)V(y) + \nu U(0)V''(y) = 0 \quad \forall y \in ]0, +\ell_y[$$

compte tenu de la relation  $U(0) = 0$ , nous obtenons

$$U''(0)V(y) = 0 \quad \forall y \in ]0, +\ell_y[.$$

Le même raisonnement nous conduit à imposer comme condition aux limites  $U''(0) = 0$ . Si nous procédons de même pour les autres conditions aux limites, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} u(x, y) = 0, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 0 & \quad \text{en } x = 0, \ell_x, \forall y \in ]0, +\ell_y[ \\ u(x, y) = 0, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 & \quad \text{en } y = 0, \ell_y, \forall x \in ]0, +\ell_x[. \end{aligned}$$

### Base modale

Afin de calculer l'expression des modes propres, appliquons les conditions aux limites à la solution générale. Intéressons-nous maintenant au premier couple de conditions aux limites. Nous avons :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + B_1 \sin \alpha x \cos \beta y + C_1 \cos \alpha x \sin \beta y + D_1 \cos \alpha x \cos \beta y \\ &+ A_2 \sinh \alpha x \sinh \beta y + B_2 \sinh \alpha x \cosh \beta y \\ &+ C_2 \cosh \alpha x \sinh \beta y + D_2 \cosh \alpha x \cosh \beta y. \end{aligned}$$

Les conditions en  $x = 0$  nous conduisent à

$$\begin{aligned} C_1 \sin \beta y + D_1 \cos \beta y + C_2 \sinh \beta y + D_2 \cosh \beta y &= 0 \\ \alpha^2 (-C_1 \sin \beta y - D_1 \cos \beta y + C_2 \sinh \beta y + D_2 \cosh \beta y) &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} C_1 \sin \beta y &= -D_1 \cos \beta y \\ C_2 \sinh \beta y &= -D_2 \cosh \beta y. \end{aligned}$$

D'où, si nous reportons ces résultats dans l'expression de la solution générale  $u(x, y)$  :

$$u(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + B_1 \sin \alpha x \cos \beta y + A_2 \sinh \alpha x \sinh \beta y + B_2 \sinh \alpha x \cosh \beta y.$$

De même, les conditions en  $y = 0$  nous conduisent à

$$\begin{aligned} B_1 \sin \alpha x + B_2 \sinh \alpha x &= 0 \\ -B_1 \sin \alpha x + B_2 \sinh \alpha x &= 0, \end{aligned}$$

D'où  $B_1 = B_2 = 0$ . Soit :

$$u(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha x \sinh \beta y.$$

Les conditions aux limites en  $x = \ell_x$  conduisent é :

$$\begin{aligned} A_1 \sin \alpha \ell_x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y &= 0 \\ -A_1 \sin \alpha \ell_x \sin \beta y + A_2 \sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y &= 0 \end{aligned}$$

soit  $\sin \alpha \ell_x \sin \beta y = 0$  et  $\sinh \alpha \ell_x \sinh \beta y = 0$ ,  $\forall y \in ]0, +\ell_y[$ . De lé, il est évident que nous avons

$$\sin \alpha \ell_x = 0 \text{ ou } \sinh \alpha \ell_x = 0.$$

Les conditions aux limites en  $y = \ell_y$  conduisent à un résultat similaire.

$$\sin \beta \ell_y = 0 \text{ ou } \sinh \beta \ell_y = 0.$$

Ces relations sont satisfaites si les termes en sinus sont nuls. La nullité des sinus hyperboliques ne peut se réaliser que si  $\alpha = 0$  ce qui correspond à une solution  $u(x, y)$  nulle partout et est bien évidemment à rejeter. Soit donc  $\alpha \ell_x = m\pi$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \ell_y = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les nombres d'onde propres de la plaque rectangulaire à bord appuyés sont ainsi donnés par

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y}\right)^2}.$$

Les pulsations propres correspondantes sont

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho_p h}} \left( \left(\frac{m\pi}{\ell_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_y}\right)^2 \right).$$

L'expression des modes propres est donnée par :

$$u_{mn}(x, y) = A_1 \sin \left( \frac{m\pi x}{\ell_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{\ell_y} \right).$$

Définissons le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} f(x, y) g^*(x, y) dx dy.$$

Calculons le produit scalaire de deux modes propres  $\langle u_{mn}, u_{pq} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle u_{mn}, u_{pq} \rangle &= \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} u_{mn}(x, y) u_{pq}(x, y) dx dy \\ &= A_1^2 \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} \sin \left( \frac{m\pi x}{\ell_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{\ell_y} \right) \sin \left( \frac{p\pi x}{\ell_x} \right) \sin \left( \frac{q\pi y}{\ell_y} \right) dx dy \\ &= A_1^2 \int_0^{\ell_x} \sin \left( \frac{m\pi x}{\ell_x} \right) \sin \left( \frac{p\pi x}{\ell_x} \right) dx \int_0^{\ell_y} \sin \left( \frac{n\pi y}{\ell_y} \right) \sin \left( \frac{q\pi y}{\ell_y} \right) dy \\ &= A_1^2 \frac{\ell_x}{2} \delta_m^p \frac{\ell_y}{2} \delta_n^q \end{aligned}$$

si nous choisissons  $A_1 = 2/\sqrt{\ell_x \ell_y}$ , il est évident que les modes propres sont orthonormés. Nous obtenons finalement :

$$u_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\ell_x \ell_y}} \sin \left( \frac{m\pi x}{\ell_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{\ell_y} \right).$$

Lorsque la plaque est carrée, les couples  $(mn)$  et  $(nm)$  correspondent à des fréquences propres identiques. Une telle situation est dite condition de dégénérescence (hormis le cas  $m = n$  qui n'est pas dégénéré). Dans ce cas-là, la plaque vibre à une fréquence  $f_{mn}$  mais sa déformée est donnée par une combinaison linéaire quelconque des modes propres correspondants. Un autre cas de dégénérescence est celui où les dimensions transversales de la plaque sont des multiples. Notons cependant que dans ce cas, la notion de base de modes propres se conserve.

### Noyau de Green

Calculons le noyau de Green de la plaque rectangulaire à bords appuyés par développement sur la base des modes propres. Pour cela, résolvons le problème :

$$\begin{aligned}\Delta_M^2 G(M, M') - k_p^4 G(M, M') &= \frac{1}{D} \delta_{M'}(M), \text{ sur la plaque} \\ G(M, M') &= 0, \text{ au bord} \\ \Delta_M G(M, M') - (1 - \nu) \partial_{\ell^2}^2 G(M, M') &= 0, \text{ au bord}\end{aligned}$$

par développement sur la base des modes propres. Pour cela cherchons

$$G(M, M') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y),$$

où les coefficients  $\alpha_{mn}$  sont les nouvelles inconnues du problème et contiennent implicitement la dépendance par rapport à  $x'$  et  $y'$ . Comme les modes propres  $u_{mn}(x, y)$ , satisfont déjà les conditions aux limites, nous nous intéressons uniquement à la première équation

$$\Delta_M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y) - k_p^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} u_{mn}(x, y) = \frac{1}{D} \delta_{M'}(M),$$

qui s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} [\Delta_M^2 u_{mn}(x, y) - k_p^4 u_{mn}(x, y)] = \frac{1}{D} \delta_{M'}(M),$$

or, par définition des modes propres  $\Delta_M^2 u_{mn}(x, y) = k_{mn}^4 u_{mn}(x, y)$ . D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} (k_{mn}^4 - k_p^4) u_{mn}(x, y) = \frac{1}{D} \delta_{M'}(M),$$

On multiplie les deux membres de cette équation par  $u_{rs}(x, y)$  et on intègre sur la surface de la plaque. Comme les modes sont orthonormés, si  $k_{rs} \neq k_p$ , on obtient

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{D} \frac{u_{rs}(x', y')}{(k_{rs}^4 - k_p^4)}.$$

Il est alors simple d'obtenir :

$$G(M, M') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn}(x', y') u_{mn}(x, y)}{D (k_{mn}^4 - k_p^4)},$$

De plus, nous avons  $k_p^4 = \rho_p h \omega^2 / D$  et  $k_{mn}^4 = \rho_p h \omega_{mn}^2 / D$ . Nous obtenons finalement

$$G(M, M') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn}(x', y') u_{mn}(x, y)}{\rho_p h (\omega_{mn}^2 - \omega^2)},$$

Bien évidemment, ce développement n'est pas défini pour  $\omega = \omega_{mn}$ . Afin de pallier cette difficulté, une procédure classique consiste à définir un module d'Young complexe sous la forme  $\hat{E} = E(1 - \eta)$ , où  $\eta \in [0, 0001; 0, 1]$  est le facteur d'amortissement du matériau. Lorsque  $\eta$  ne dépend pas de la fréquence, cette méthode est à utiliser avec précaution car elle conduit à des résultats non causaux. Ceci conduit à une rigidité en flexion  $\hat{D} = D(1 - \eta)$ . On définit les pulsations propres complexes  $\hat{\omega}_{mn}$  comme

$$\hat{\omega}_{mn} = \frac{D(1 - \eta)}{\rho_p h} \left( \left( \frac{m\pi}{\ell_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\ell_y} \right)^2 \right),$$

On obtient alors simplement l'expression des fréquences propres complexes de la plaque  $\hat{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 (1 - \eta)$  et le développement modal s'écrit

$$G(M, M') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{mn}(x', y') u_{mn}(x, y)}{\rho_p h (\omega_{mn}^2 (1 - \eta) - \omega^2)},$$

qui est défini pour toute fréquence d'excitation.

À la différence des plaques rectangulaires pour lesquelles seules des conditions aux limites d'appui (sur les quatre faces ou sur deux faces opposées) permettent d'obtenir une solution analytique, le problème des plaques circulaires, qu'elles soient encastrées, appuyées ou libres, peut se résoudre analytiquement. Nous allons étudier les deux cas extrêmes des plaques encastrées et libres qui font apparaître les principales caractéristiques du problème associé. Enfin, nous proposons quelques résultats pour une plaque appuyée.

### 2.3.2 Plaque circulaire encastrée

Considérons une plaque circulaire, qui occupe un domaine défini en coordonnées polaires  $(0, r, \theta)$  par  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Cette plaque est supposée encastrée sur tout son pourtour.

#### Fréquences propres et modes propres

Les conditions aux limites sont données par l'annulation du déplacement et de sa dérivée normale au bord. Nous avons donc à résoudre

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(r, \theta) - \frac{\omega^2 \rho_p h}{D} u(r, \theta) &= 0, r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi[ \\ u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[ \\ \partial_n u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Du fait de la géométrie du problème, il est évident que nous avons  $\partial_n u(r, \theta) = \partial_r u(r, \theta)$ . Utilisons l'expression de la solution générale en coordonnées polaires :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_p r) + B_n I_n(k_p r)\} e^{in\theta}.$$

L'application des conditions aux limites conduit aux équations

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_p R) + B_n I_n(k_p R)\} e^{in\theta} &= 0, \theta \in [0, 2\pi[ \\ -k_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J'_n(k_p R) + B_n I'_n(k_p R)\} e^{in\theta} &= 0, \theta \in [0, 2\pi[, \end{aligned}$$

Ces équations sont valables pour tout  $\theta$ . Donc, pour chaque  $n$ , nous avons :

$$\begin{aligned} A_n J_n(k_p R) + B_n I_n(k_p R) &= 0 \\ A_n J'_n(k_p R) + B_n I'_n(k_p R) &= 0, \end{aligned}$$

il est évident que ce système n'admet une solution non nulle que si son déterminant est nul. Nous avons donc l'équation aux valeurs propres :

$$J_n(k_p R) I'_n(k_p R) - I_n(k_p R) J'_n(k_p R) = 0.$$

Cette équation admet pour chaque valeur de  $n$  une infinité de racines réelles. Les premières sont données dans la table suivante.

$k_{mn}R$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 0$	3,1962	6,3064	9,4394	12,577	15,7163
$n = 1$	4,6108	7,7987	10,9581	14,1088	17,2560
$n = 2$	5,9059	9,213	12,402	15,5791	18,7451
$n = 3$	7,144	3,3181	13,7949	17,0050	20,920
$n = 4$	8,3466	11,8367	15,1498	18,3959	21,6069

$$\begin{aligned} k_{m0}R &\rightarrow (m+1)\pi \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Les valeurs propres forment une double infinité dénombrable -ce qui correspond bien à la physique de ce problème bidimensionnel-. Pour chaque couple  $(mn)$ , nous avons une déformée unique. À l'ordre  $n$  correspond le nombre de diamètres nodaux et à  $m$  le nombre de cercles nodaux. Rappelons qu'une ligne nodale est l'analogie à deux dimensions du nœud de vibration d'une corde ou d'une poutre. Les modes qui correspondent à  $m = 0$  sont dits axisymétriques (é symétrie de révolution). Calculons l'expression des modes propres. De la première condition aux limites, nous déduisons :

$$\frac{A_n}{B_n} = -\frac{I_n(k_p R)}{J_n(k_p R)}.$$

Les modes propres s'écrivent ainsi (pour  $k_p = k_{mn}$ )

$$u_{mn}(r, \theta) = \frac{A_{mn}}{I_n(k_{mn}R)} \{I_n(k_{mn}R) J_n(k_{mn}r) - J_n(k_{mn}R) I_n(k_{mn}r)\} e^{in\theta}.$$

L'orthonormalité de ces modes propres peut être démontrée en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel. Rappelons que le produit scalaire est défini, sur un domaine circulaire, pour des fonctions complexes par :

$$\langle u_{mn}, u_{pq} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{mn}(r, \theta) u_{pq}^*(r, \theta) r dr d\theta,$$

où  $f^*$  est le conjugué de  $f$ .

### Régime forcé

Supposons maintenant que cette plaque soit soumise à une force ponctuelle unitaire située à l'origine. Le système d'équations à résoudre est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(r, \theta) - \frac{\omega^2 \rho_p h}{D} u(r, \theta) &= \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta), r \in [0, R[, \theta \in [0, 2\pi[ \\ u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[ \\ \partial_n u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$



Le développement sur la base des modes propres est donné par

$$u(r, \theta) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{f_{mn}}{k_{mn}^4 - k^4} u_{mn}(r, \theta),$$

où

$$\begin{aligned} f_{mn} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta) u_{mn}^*(r, \theta) r dr d\theta \\ &= u_{mn}^*(0, 0). \end{aligned}$$

Or

$$u_{mn}^*(0, 0) = \frac{A_{mn}}{I_n(k_{mn}R)} \{I_n(k_{mn}R) J_n(0) - J_n(k_{mn}R) I_n(0)\} = u_{mn}(0, 0).$$

D'autre part, nous avons les résultats suivants :

$$J_n(0) = I_n(0) = 0, \text{ si } n \geq 1 \text{ et } J_0(0) = I_0(0) = 1.$$

Nous obtenons finalement  $u_{mn}(0, 0) = 0$  si  $n \geq 1$ , soit :

$$u(r, \theta) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} \frac{1}{k_{m0}^4 - k^4} \frac{A_{m0}}{I_0(k_{m0}R)} \{I_0(k_{m0}R) - J_0(k_{m0}R)\} u_{m0}(r, \theta),$$

nous remarquons que seuls les modes axisymétriques sont excités puisque  $u_{m0}(r, \theta) = u_{m0}(r)$  ne dépend pas de  $\theta$ . La solution est à symétrie de révolution. Ceci correspond bien à la physique du problème puisque l'excitation est à symétrie de révolution.

La série précédente ne converge que lentement au voisinage du point d'excitation. Cherchons une solution mieux adaptée au calcul numérique. Pour ce faire, cherchons la solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(r, \theta) - \frac{\omega^2 \rho_p h}{D} u(r, \theta) &= \frac{1}{r} \delta_{r_0}(r) \delta_{\theta_0}(\theta), r \in [0, R[, \theta \in [0, 2\pi[ \\ u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[ \\ \partial_n u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Comme la somme d'un champ incident qui satisfait l'équation des plaques non homogène (soumise à la même force excitatrice) et d'un champ diffracté qui satisfait l'équation des plaques homogène et tel que cette somme satisfasse les conditions aux limites. On utilise ici la méthode d'intégration des équations différentielles non homogènes qui consiste à chercher la solution de l'équation comme la somme de la solution générale et de la solution particulière (ici le noyau de Green de l'équation des plaques puisque le second membre est une fonction de Dirac). L'expression de la solution générale est cherchée de manière à satisfaire la condition aux limites. Soit donc  $u = u_0 + u_g$ , avec

$$\begin{aligned} u_g &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_p r) + B_n I_n(k_p r)\} e^{in\theta}, \text{ solution générale} \\ u_0 &= \frac{i}{8Dk^2} (H_0(k_p M M_0) - H_0(i k_p M M_0)), \text{ solution particulière} \end{aligned}$$

où  $M = (r, \theta)$ , et  $M_0 = (r_0, \theta_0)$ . Les conditions aux limites nous donnent  $u_g = -u_0$  en  $r = R$  et  $u'_g = -u'_0$  en  $r = R$ . Rappelons le développement en séries d'harmoniques cylindriques de la fonction de Hankel

$$\begin{aligned} H_0(k_p M M_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_p r) H_n(k_p r_0) e^{in(\theta - \theta_0)}, \text{ si } r \leq r_0 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n(k_p r) J_n(k_p r_0) e^{in(\theta - \theta_0)}, \text{ si } r \geq r_0. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, nous avons  $R \geq r_0$  donc

$$\lim_{r \rightarrow R} u_0 = \lim_{r \rightarrow R} \frac{\imath}{8Dk^2} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ H_n(k_p r) J_n(k_p r_0) - \frac{\imath\pi}{2} K_n(k_p r) I_n(k_p r_0) \right\} e^{\imath n(\theta - \theta_0)} \right),$$

Les conditions aux limites s'écrivent pour chaque terme de la série  $n$  :

$$\begin{aligned} A_n J_n(k_p R) + B_n I_n(k_p R) &= -\frac{\imath}{8Dk^2} \left( H_n(k_p R) J_n(k_p r_0) - \frac{\imath\pi}{2} K_n(k_p R) I_n(k_p r_0) \right) e^{-\imath n\theta_0} \\ A_n J'_n(k_p R) + B_n I'_n(k_p R) &= -\frac{\imath}{8Dk^2} \left( H'_n(k_p R) J_n(k_p r_0) - \frac{\imath\pi}{2} K'_n(k_p R) I_n(k_p r_0) \right) e^{-\imath n\theta_0}. \end{aligned}$$

Nous obtenons un système linéaire de déterminant  $\Delta_m$ , donné par

$$\Delta_m = J_n(k_p R) I'_n(k_p R) + J'_n(k_p R) I_n(k_p R),$$

bien évidemment, nous retrouvons les mêmes fréquences propres que précédemment. Posons

$$\begin{aligned} C_n(R, r_0) &= -\frac{\imath}{8Dk^2} \left( H_n(k_p R) J_n(k_p r_0) - \frac{\imath\pi}{2} K_n(k_p R) I_n(k_p r_0) \right) \\ D_n(R, r_0) &= -\frac{\imath}{8Dk^2} \left( H'_n(k_p R) J_n(k_p r_0) - \frac{\imath\pi}{2} K'_n(k_p R) I_n(k_p r_0) \right). \end{aligned}$$

Les constantes  $A_m$  et  $B_m$  sont données par :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(C_n(R, r_0) I'_n(k_p R) - D_n(R, r_0) J_n(k_p R)) e^{-\imath n\theta_0}}{\Delta_m} \\ B_n &= \frac{(D_n(R, r_0) J_n(k_p R) - C_n(R, r_0) I'_n(k_p R)) e^{-\imath n\theta_0}}{\Delta_m}. \end{aligned}$$

Nous obtenons une série qui converge rapidement (en dehors des fréquences propres). Pour une précision donnée, le nombre de termes nécessaires est pratiquement divisé par dix par rapport à la série des modes propres.

### 2.3.3 Plaque circulaire libre

Le cas de la plaque circulaire à bord libre est plus compliqué à traiter que celui de la plaque encadrée du fait des conditions aux limites. Intéressons-nous à la détermination des fréquences propres. Soit donc le système :

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(r, \theta) - \frac{\omega^2 \rho_p h}{D} u(r, \theta) &= \frac{1}{r} \delta_{r_0}(r) \delta_{\theta_0}(\theta), r \in [0, R[, \theta \in [0, 2\pi[ \\ \Delta u(r, \theta) - (1 - \nu) \partial_l^2 u(r, \theta) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[ \\ \partial_n \Delta u(r, \theta) + (1 - \nu) \partial_l (\partial_n \partial_l u(r, \theta)) &= 0, r = R, \theta \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Nous savons que  $\Delta = \partial_l^2 + \partial_n^2$  et nous avons :

$$\partial_l = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \partial_n = \frac{\partial}{\partial r}, \partial_l^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \partial_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{ et } \partial_l \partial_n = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}$$

Les conditions aux limites deviennent, pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$  :

$$\begin{aligned} \Delta u - (1 - \nu) \partial_l^2 u &= 0, r = R \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow R} (\Delta u - (1 - \nu) \partial_l^2 u) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_n \Delta u + (1 - \nu) \partial_t (\partial_n \partial_t u) &= 0, r = R \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial r} + (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \lim_{r \rightarrow R} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial r} + (1 - \nu) \left( -\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Notons que dans ces relations nous n'avons pas développé de Laplacien. En effet, ces équations sont appliquées à des fonctions qui sont des produits entre des fonctions de Bessel et des exponentielles complexes  $2 - \pi$  périodiques. L'équation de Bessel (le Laplacien en coordonnées polaire à un terme près) nous conduit au résultat :

$$\begin{aligned} \Delta \left( J_n(k_p r) e^{-m\theta} \right) &= -k^2 J_n(k_p r) e^{-m\theta} \\ \Delta \left( I_n(k_p r) e^{-m\theta} \right) &= k^2 I_n(k_p r) e^{-m\theta}. \end{aligned}$$

Pour calculer les fréquences propres, repartons de la solution générale à laquelle nous appliquons les conditions aux limites. Soit

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{A_n J_n(k_p r) + B_n I_n(k_p r)\} e^{m\theta}.$$

Pour chaque terme  $n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} A_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \Delta J_n(k_p r) e^{m\theta} - (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} \right) \\ + B_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \Delta I_n(k_p r) e^{m\theta} - (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \Delta J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + (1 - \nu) \left( -\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \right) \\ + B_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \Delta I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + (1 - \nu) \left( -\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} A_n \lim_{r \rightarrow R} \left( -k^2 J_n(k_p r) e^{m\theta} - (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} \right) \\ + B_n \lim_{r \rightarrow R} \left( k^2 I_n(k_p r) e^{m\theta} - (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{-\partial k^2 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + (1 - \nu) \left( -\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 J_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \right) \\ + B_n \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial k^2 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial r} + (1 - \nu) \left( -\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 I_n(k_p r) e^{m\theta}}{\partial \theta^2 \partial r} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_n \left( -k^2 J_n(k_p R) - (1 - \nu) \left( \frac{k_p J'_n(k_p R)}{R} - n^2 \frac{J_n(k_p R)}{R^2} \right) \right) e^{m\theta} \\ + B_n \left( k^2 I_n(k_p R) - (1 - \nu) \left( \frac{k_p I'_n(k_p R)}{R} - n^2 \frac{I_n(k_p R)}{R^2} \right) \right) e^{m\theta} &= 0, \end{aligned}$$

et

$$A_n \left( -k^3 J'_n(k_p R) - \frac{(1-\nu)n^2}{R^2} \left( -\frac{J_n(k_p R)}{R} + k_p J'_n(k_p R) \right) \right) e^{in\theta} \\ + B_n \left( -k^3 I'_n(k_p R) - \frac{(1-\nu)n^2}{R^2} \left( -\frac{I_n(k_p R)}{R} + k_p I'_n(k_p R) \right) \right) e^{in\theta} = 0.$$

Ces deux équations doivent être vraies pour tout  $\theta$ . Nous avons donc le système linéaire  $2 \times 2$  suivant :

$$A_n \left( -k^2 J_n(k_p R) - \frac{1-\nu}{R} \left( k_p J'_n(k_p R) - n^2 \frac{J_n(k_p R)}{R} \right) \right) \\ + B_n \left( k^2 I_n(k_p R) - \frac{1-\nu}{R} \left( k_p I'_n(k_p R) - n^2 \frac{I_n(k_p R)}{R} \right) \right) = 0 \\ A_n \left( -k^3 J'_n(k_p R) - \frac{(1-\nu)n^2}{R^2} \left( -\frac{J_n(k_p R)}{R} + k_p J'_n(k_p R) \right) \right) \\ + B_n \left( -k^3 I'_n(k_p R) - \frac{(1-\nu)n^2}{R^2} \left( -\frac{I_n(k_p R)}{R} + k_p I'_n(k_p R) \right) \right) = 0.$$

Comme précédemment, les valeurs de  $k_p R$  qui annulent le déterminant de ce système sont les valeurs propres de la plaque. L'équation aux valeurs propres est donnée par :

$$\frac{-\lambda^2 J_n(\lambda) - (1-\nu)(\lambda J'_n(\lambda) - n^2 J_n(\lambda))}{-\lambda^3 J'_n(\lambda) - (1-\nu)n^2(-J_n(\lambda) + \lambda J'_n(\lambda))} = \frac{\lambda^2 I_n(\lambda) - (1-\nu)(\lambda I'_n(\lambda) - n^2 I_n(\lambda))}{-\lambda^3 I'_n(\lambda) - (1-\nu)n^2(-I_n(\lambda) + \lambda I'_n(\lambda))}.$$

où  $\lambda = k_p R$ . Il est à noter que les valeurs propres dépendent du coefficient de Poisson alors qu'elles en étaient indépendantes pour la plaque encastree. Les premières valeurs propres sont consignées ci-dessous (pour  $\nu = 0,33$ )

$k_{mn}R$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 0$		3,0113	6,2088	9,3701	12,5299
$n = 1$		4,5299	7,7369	10,9087	14,0783
$n = 2$	2,2919	5,9371	9,1596	12,4096	15,5788
$n = 3$	3,4971	7,2174	10,5498	13,8600	17,0499
$n = 4$	4,6475	8,5445	11,9498	15,2413	18,4499

$$k_{mn}R \rightarrow (m+2n) \frac{\pi}{2} \\ n \rightarrow \infty$$

Nous remarquons que les deux “premières” valeurs propres n'existent pas. En outre les valeurs propres sont plus basses que celles obtenues pour la plaque encastree. Le spectre de la plaque encastree est décalé vers les aigus. Ceci est en accord avec le principe des liaisons supplémentaires qui impose un décalage du spectre vers les aigus pour toute contrainte supplémentaire ajoutée au système.

### 2.3.4 Plaque circulaire appuyée

Nous nous contentons ici de donner les résultats essentiels. La méthodologie à employer ne diffère pas de celle mise en œuvre précédemment. Les conditions aux limites conduisent au système :

$$A_n J_n(k_p R) + B_n I_n(k_p R) = 0 \\ A_n \left[ J''_n(k_p R) + \frac{\nu}{k_p R} J'_n(k_p R) \right] + B_n \left[ I''_n(k_p R) + \frac{\nu}{k_p R} I'_n(k_p R) \right] = 0,$$

Regroupons les termes et utilisons les propriétés des fonctions de Bessel, l'équation aux valeurs propres est donnée par la relation :

$$\frac{J_{n+1}(k_p R)}{J_n(k_p R)} + \frac{I_{n+1}(k_p R)}{I_n(k_p R)} = \frac{2k_p R}{1 - \nu}$$

Les premières valeurs propres sont présentées ci-dessous ( $\nu = 0, 3$ ) :

$k_{mn}R$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 0$	2,2309	5,4552	8,6139	11,7618
$n = 1$	3,7336	6,9649	10,1390	13,2981
$n = 2$	5,0645	8,3749	11,5901	14,7729

## 2.4 Plaque finie quelconque

Lorsque la plaque est de forme quelconque ou soumise à des conditions aux limites non uniformes, les méthodes précédentes ne sont plus applicables. Il devient nécessaire de faire appel à des méthodes plus fines. Ces dernières ne sont applicables qu'avec l'aide d'un ordinateur. Ces méthodes sont de deux types. La méthode de Rayleigh-Ritz (et son corollaire la méthode des éléments finis) et la méthode des équations intégrales de frontières. L'avantage de la méthode des éléments finis réside dans le fait qu'elle s'applique à tout type de géométrie (comme les plaques à épaisseur variable) et tout type de comportement mécanique. Son inconvénient vient justement de sa généralité en ce sens qu'elle est lourde à mettre en œuvre et que sa précision est parfois difficile à évaluer. L'autre méthode consiste, à partir de la représentation de Green de la plaque, à établir une représentation intégrale du déplacement. L'avantage principal tient au fait que le système différentiel initial est transformé en un système intégral (plus adapté au calcul numérique) défini sur le bord de la plaque. La dimension du problème est abaissée d'un ordre de grandeur. Les nouvelles inconnues sont définies sur le bord du domaine. L'inconvénient tient au fait que cette méthode n'est applicable que si nous sommes capables d'explicitier le noyau de Green de l'équation des plaques. Ce qui limite son champ d'application aux plaques homogènes et isotropes.

### 2.4.1 Formule de Green

Soit  $\Omega$ , l'ensemble des points de la plaque.  $u$  et  $v$ , deux fonctions nulles à l'extérieur de  $\Omega$ . Considérons la forme bilinéaire  $a(u, v)$  définie par :

$$a(u, v) = D \int_{\Omega} [\Delta u \Delta v + 2(1 - \nu) (u_{,12}v_{,12} - u_{,11}v_{,22} - u_{,22}v_{,11})].$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont les variables d'espace.  $a(u, u)$  représente la densité d'énergie potentielle interne de la plaque. Une première intégration par parties conduit à :

$$a(u, v) = D \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v + \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u) \partial_n v - (\ell_2 u) v,$$

où  $\ell_1 u = D(\Delta u - (1 - \nu)\partial_l^2 u)$  et  $\ell_2 u = D(\partial_n \Delta u + (1 - \nu)\partial_l(\partial_n \partial_l u))$ . Une seconde intégration par parties conduit à :

$$a(u, v) = D \int_{\Omega} (\Delta^2 v) u + \int_{\partial\Omega} (\ell_1 v) \partial_n u - (\ell_2 v) u,$$

par différence des deux expressions, nous obtenons la formule de Green de l'opérateur des plaques :

$$D \int_{\Omega} (\Delta^2 v) u - (\Delta^2 u) v = + \int_{\partial\Omega} [(\ell_1 v) \partial_n u - (\ell_1 u) \partial_n v - (\ell_2 v) u + (\ell_2 u) v],$$

### 2.4.2 Représentation de Green du déplacement de la plaque

Nommons  $G(M, M')$  le noyau de Green de l'équation des plaques. Construisons l'ensemble des solutions de

$$D(\Delta^2 - k_p^4)u(M) = F(M), m \in \Omega$$

Prolongeons  $u$  et  $G$  par zéro à l'extérieur de  $\Omega$  et appliquons la formule de Green à  $u(M')$  et  $G(M, M')$ . Il vient

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} (\Delta^2 u(M')) G(M, M') - (\Delta_{M'}^2 G(M, M')) u(M') &= \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(M')) \partial_{n(M')} G(M, M') \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (\ell_{1M'} G(M, M')) \partial_n u(M') \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (\ell_2 u(M')) G(M, M') \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\ell_{2M'} G(M, M')) u(M'), \end{aligned}$$

où  $\ell_{1M'}$  indique que l'opérateur  $\ell_1$  porte sur la variable  $M'$ . Ajoutons et retranchons au premier membre de cette équation  $k_p^4 u(M') G(M, M')$ . Regroupons les termes. Nous avons en outre :

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} (\Delta^2 u(M') - k_p^4 u(M')) G(M, M') &= \int_{\Omega} F(M') G(M, M') \\ D \int_{\Omega} (\Delta_{M'}^2 G(M, M') - k_p^4 G(M, M')) u(M') &= \int_{\Omega} \delta_M(M') u(M') \\ &= u(M). \end{aligned}$$

La représentation intégrale du déplacement est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} u(M) &= u_0(M) + D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(M')) \partial_{n(M')} G(M, M') - (\ell_2 u(M')) G(M, M') \\ &\quad - D \int_{\partial\Omega} (\ell_{1M'} G(M, M')) \partial_n u(M') - (\ell_{2M'} G(M, M')) u(M'). \end{aligned}$$

où  $u_0(M) = \int_{\Omega} F(M') G(M, M')$  est le terme de source. Cette relation intégrale est la représentation de Green du déplacement  $u(M)$ . Il est possible de montrer que l'intégrale de frontière est la solution générale de l'équation homogène qui régit les mouvements vibratoires de flexion d'une plaque mince.

### 2.4.3 Équations intégrales de frontière

Dans la représentation de Green du déplacement  $u$ , il apparaît quatre fonctions inconnues :

$$\ell_1 u, \ell_2 u, \partial_n u \text{ et } u$$

qu'il faut déterminer. Si nous choisissons l'une quelconque des trois conditions aux limites imposées par le problème, deux de ces fonctions inconnues sont nulles. Il reste alors à déterminer les deux autres. Pour ce faire, il suffit d'exprimer deux des fonctions  $\ell_1 u, \ell_2 u, \partial_n u$  ou  $u$  à partir de la représentation intégrale et d'appliquer à nouveau les conditions aux limites pour obtenir un système de deux équations intégrales de frontières à deux inconnues. Par exemple, considérons le cas d'une plaque encastree sur  $\partial\Omega$ . Nous avons  $\partial_n u = 0$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . La représentation intégrale de  $u$  s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_{\Omega} F(M') G(M, M') \\ &\quad + D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(M')) \partial_{n(M')} G(M, M') - (\ell_2 u(M')) G(M, M'). \end{aligned}$$

Le noyau de Green de la plaque et sa dérivée sont réguliers, il n'est pas nécessaire de prendre des précautions particulières pour le calcul de cette intégrale et de sa dérivée normale sur le bord du domaine. Par contre, dans le cas d'une plaque appuyée ou encastrée les intégrales se calculent au sens des valeurs principales de Cauchy s'il apparaît une dérivée d'ordre deux ou se calculent au sens des parties finies au sens de Hadamard pour des dérivées du noyau d'ordre supérieure ou égal à trois. Pour la plaque encastrée, il n'y a pas de problème particulier. La limite (pour un point de  $\Omega$  qui tend vers un point de  $\partial\Omega$ ) de chaque intégrale est l'intégrale des limites. Nous obtenons le système suivant :

$$D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(M')) \partial_{n(M')} G(Q, M') - (\ell_2 u(M')) G(Q, M') = u_0(Q)$$

$$D \int_{\partial\Omega} (\ell_1 u(M')) \partial_{n(M')} \partial_{n(Q)} G(Q, M') - (\ell_2 u(M')) \partial_{n(Q)} G(Q, M') = \partial_{n(Q)} u_0(Q),$$

pour  $Q \in \partial\Omega$ . Nous obtenons un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Il n'est pas dans notre objectif de résoudre cette équation ; ce qui ne peut se faire que sur ordinateur. L'idée de base consiste à transformer ce système intégral en un système algébrique linéaire. Pour ce faire, les inconnues du problème sont cherchées sous la forme d'un développement en série. Les coefficients de ces séries deviennent les nouvelles inconnues du problème. Soit par exemple à calculer :

$$I = \int_{\partial\Omega} (\ell_2 u(M')) G(Q, M'),$$

posons :

$$\ell_2 u(M') = \sum_{i=1}^{i=N} a_i f_i(M'),$$

Nous obtenons

$$I = \sum_{i=1}^{i=N} a_i \int_{\partial\Omega} f_i(M') G(Q, M'),$$

expression dans laquelle l'intégrale se calcule numériquement sans difficultés. De nombreux choix de fonctions d'approximation existent comme les fonctions constantes par morceaux ou les polynômes orthogonaux. Nous obtenons finalement un système de  $2N$  inconnues à  $2N$  coefficients. Le principe de ces méthodes consiste à calculer les intégrales par des quadratures numériques plus ou moins fines. Approcher la fonction par des constantes par morceaux revient à calculer l'intégrale par une méthode de rectangles. L'approximation par des polynômes orthogonaux revient à estimer ladite intégrale par une méthode de Gauss. Les deux grandes méthodes de résolution sont la méthode de Galerkin (la plus précise) et la méthode de collocation (la plus simple à mettre en œuvre). Précisons-en les grandes lignes.

Pour la méthode de Galerkin, considérons  $H$  un espace de Hilbert dans lequel est défini un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et soit  $H^N$ , un sous-espace de dimension finie :  $\dim(H^N) = N$ . Une approximation  $f^N \in H^N$  de  $f$ , solution de l'équation  $Af = g$  dans  $H$ , où  $A$  est un opérateur linéaire (dans notre cas, un opérateur intégral) par la méthode de Galerkin satisfait :

$$\langle Af^N, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle, \text{ pour chaque } \phi \in H^N.$$

Soit  $f^N = \sum_{k=1}^{k=N} c_k f_k \phi_{k-1}$ , où  $\{\phi_k\}_k$  est une base de  $H$ . Alors, nous avons

$$\sum_{k=1}^{k=N} c_k f_k \langle A\phi_{k-1}, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle,$$

cette équation est vraie pour tout  $\phi$  de  $H^N$ . En particulier, pour chaque  $\phi_{j-1}, j = 1..N$ . Alors

$$\sum_{k=1}^{k=N} c_k f_k \langle A\phi_{k-1}, \phi_{j-1} \rangle = \langle g, \phi_{j-1} \rangle, j = 1..N.$$

Les coefficients  $f_k$  sont évalués en résolvant un système linéaire algébrique  $N \times N$  dans lequel chaque coefficient est donné par un produit scalaire. Notons que cette méthode est généralement appliquée à des fonctions d'approximations polynomiales. Par exemple des polynômes de Legendre ou de Tchebycheff.

Pour la méthode de collocation,  $f$  est approchées par  $\check{f}^N = \sum_{k_p=1}^{k=N} c_k \check{f}_k \phi_{k-1}$ . Cette équation est satisfaite en un nombre fini de points :

$$\sum_{k=1}^{k=N} c_k \check{f}_k A \phi_{k-1} = g \text{ en } x = x_i, i = 1..N,$$

les points  $x_i, i = 1..N$  sont les points de collocation. Les coefficients  $f_k$  sont encore évalués en résolvant un système linéaire algébrique  $N \times N$ . L'intérêt de cette méthode vient du fait que les coefficients  $\check{f}_k$  sont plus faciles à calculer que dans la méthode de Galerkin (une intégrale simple au lieu d'une intégrale double). La précision est bien entendu moindre. Dans la méthode de collocation, la solution est cherchée en interpolant la fonction inconnue -la fonction et son interpolée sont égales en un nombre fini de points-. Dans la méthode de Galerkin, la solution est cherchée en construisant une approximation de la fonction inconnue -la distance entre la fonction et son approximation est rendue minimale au sens du produit scalaire choisi-. Nous ne développons pas plus ces méthodes numériques. De nombreux ouvrages leurs sont consacrés.

Énonçons le théorème d'existence suivant (qui prouve l'équivalence entre le système différentiel de départ et le système intégrale final) :

1. Il existe une suite -double- dénombrable de valeur  $k_{mn}$  de  $k$  pour lesquelles le système homogène d'équations intégrales de frontière possède un nombre fini de solutions non nulles. Les  $k_{mn}$  sont les nombres d'onde propre de la plaque.
2. À chaque  $k_{mn}$  correspond un nombre fini de fonctions  $u_{mn}$ , définies par la représentation intégrale et qui sont solutions du problème aux limites homogène pour  $k_p = k_{mn}$ .
3. Si  $k_p = k_{mn}$ , le problème aux limites non homogène n'a pas de solutions. Si  $k_p \neq k_{mn}$ , le problème non homogène possède une et une seule solution quel que soit le second membre. La solution du problème aux limites initial est donnée par la représentation intégrale ci-dessus.



## Chapitre 3

# Premières notions de Vibroacoustique

L'apparition d'une onde acoustique dans un fluide a souvent pour origine la mise en vibration d'un solide élastique. C'est le cas de nombreux instruments de musique (sauf les vents) et de la plupart des machines. Par exemple, pour les instruments de musique à cordes, la corde qui vibre transmet son mouvement au corps de l'instrument qui se met à son tour à vibrer et transmet son énergie vibratoire à l'air qui l'entoure. 95% de l'énergie totale rayonnée par un violon l'est par sa caisse et 5% par la corde qui vibre. Remarquons que les fréquences propres d'un bon violon correspondent aux notes de la gamme. Hormis les aspects agréables (comme certaines musiques) ou nuisibles, il est important de noter que bruit rayonné par un objet peut être un moyen de contrôle du bon état de celui-ci. Une plaque fissurée n'a pas la même "signature" acoustique que lorsqu'elle est saine. L'aspect inverse de ce phénomène est la mise en vibration d'une structure par un champ acoustique et la transmission du son par celle-ci. Ainsi entend-t-on ce qui se passe de l'autre côté d'une cloison ou d'une vitre. Un exemple amusant est celui de la chanteuse qui en chantant une note particulière peut briser un verre. La fréquence de la note chantée correspond à une fréquence propre du verre qui vibre alors avec une telle amplitude qu'il se brise (de fait, ceci n'arrive que si le verre présente des défauts structurels comme des micro-fissurations). Notons encore que la vibration d'une structure peut aussi être induite par un fluide en mouvement, que ce soit par l'intermédiaire d'une couche limite turbulente ou par un lécher tourbillonnaire régulier.

Ces phénomènes ont une importance toute particulière dans le monde industriel, très sensible aux nuisances sonores, et tout spécialement dans le domaine des transports. À titre d'exemple, les moteurs de lanceur de satellites de type Ariane au décollage créent un champ sonore au voisinage de la coiffe de l'ordre de 160 dB. Le son transmis par la coiffe est susceptible d'endommager le matériel embarqué et le poids des matériaux d'isolation acoustique utilisés avoisine 300 Kg ; il est crucial de bien comprendre le phénomène d'interaction fluide structure pour espérer diminuer le niveau vibratoire dans la coiffe pour pouvoir augmenter la charge utile.

Nous étudions un exemple particulièrement simple à une dimension. Cet exemple, purement académique, permet un calcul analytique complet et dégage quelques idées essentielles.

### 3.1 Un exemple simple

Considérons un guide d'onde infini de section unitaire constante (voir figure 3.1). En  $x = 0$ , le guide comporte une "cloison" constituée d'une paroi mince (devant la longueur d'onde) de masse  $m$  et suspendue à un ressort de raideur  $r$ . De part et d'autre de la cloison, le guide est rempli d'un fluide parfait de masse volumique  $\rho_0$  et de célérité du son  $c_0$ . Cette paroi sépare le guide en deux régions "étanches" (le fluide ne peut pas traverser la cloison). En outre, nous supposons que seules des ondes planes peuvent se propager parallèlement à l'axe du guide.

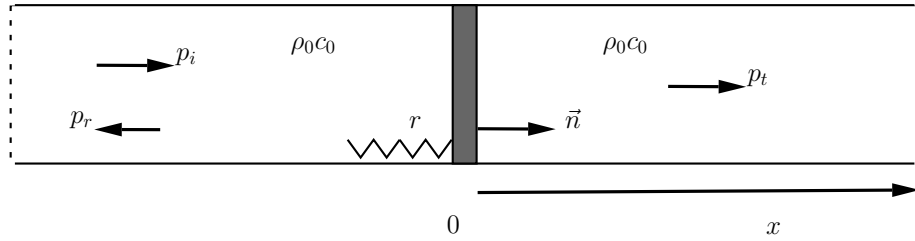


FIGURE 3.1 – Géométrie du guide d'onde 1D

### 3.1.1 Équations du mouvement

Soit  $F$ , la force qui agit sur la cloison et  $U$  son déplacement.  $U$  est solution de l'équation différentielle (classique) masse-ressort

$$m \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + rU(t) = F.$$

La force  $F$  comprend deux termes. Le premier est une force extérieure  $F_e$  et le second  $F_p$  est la différence des pressions acoustiques qui règnent de part et d'autre de la cloison. On a  $F = F_e - F_p$ . Le choix du signe de la force excitation est guidé par des considérations physiques. La force  $F_e$  est une force injectée au système, elle apporte donc de l'énergie son signe est positif. La force de pression  $F_p$  est une force qui est perdue par la cloison son signe est donc négatif. Soit  $S^+$  et  $S^-$  des sources acoustiques placées dans les demi-guides  $x > 0$  et  $x < 0$ .  $p^+$  et  $p^-$  sont les pressions acoustiques qui règnent dans les deux demi-guides. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{dans } x > 0 \quad & \frac{\partial^2 P^+(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P^+(x, t)}{\partial t^2} = S^+(x, t) \\ \text{dans } x < 0 \quad & \frac{\partial^2 P^-(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P^-(x, t)}{\partial t^2} = S^-(x, t). \end{aligned}$$

Comme le fluide est supposé parfait, il y a adhérence de celui-ci à la paroi. Il y a continuité des vitesses normales à la paroi. Nous avons  $dU(t)/dt = V^+(0, t) = V^-(0, t)$  où  $V^\pm(0, t)$  sont les vitesses des particules fluides contenues dans  $x < 0$  et  $x > 0$ . On obtient alors à partir de l'équation de conservation de l'impulsion la condition de continuité des accélérations normales  $\rho_0 d^2 U/dt^2 = -\partial_n p(x=0) = -\partial p(x=0, t)/\partial x$  où  $\rho$  est la masse par unité de longueur du fluide (problème monodimensionnel). À ceci, rajoutons que les ondes émises et réfléchies par la cloison se propagent vers les  $x > 0$  pour le demi guide  $x > 0$  (et vers les  $x < 0$  pour le demi-guide  $x < 0$ ).

### 3.1.2 Régime harmonique

Rappelons que la transformée de Fourier est définie par

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{+i\omega t} dt, \text{ soit encore } F(t) = f(\omega) e^{-i\omega t} \\ F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Note : dans toute la suite, la dépendance par rapport à la pulsation  $\omega$  est omise lorsque cela ne prête pas à confusion. On pose ainsi  $f(\omega)$ ,  $u(\omega)$ ,  $p^\pm(x, \omega)$  et  $s^\pm(x, \omega)$  les transformées de Fourier du terme excitateur, du déplacement de la paroi, des pressions et des sources acoustiques. Nous avons :

$$F_e(t) = f_e e^{-i\omega t}, F_p(t) = f_p e^{-i\omega t}, S^\pm(x, t) = s^\pm(x) e^{-i\omega t}, U(t) = u e^{-i\omega t}, P^\pm(x, t) = p^\pm(x) e^{-i\omega t}.$$

Le système d'équations à résoudre s'écrit si  $f_p = p^+(0) - p^-(0)$

$$\begin{aligned} -m\omega^2 u + ru &= f_e - p^+(0) + p^-(0) \\ \frac{d^2 p^+(x)}{dx^2} + k^2 p^+(x) &= s^+(x) \text{ dans } x > 0 \\ \frac{d^2 p^-(x)}{dx^2} + k^2 p^-(x) &= s^-(x) \text{ dans } x < 0. \end{aligned}$$

À ces équations se rajoute l'équation de conservation de l'impulsion  $\omega^2 \rho_0 u = p'(x=0)$ . Remarquons que la première équation ci-dessus fait apparaître une pulsation particulière  $\omega_0$ , définie par  $\omega_0^2 = r/m$ .  $\omega_0$  est la pulsation propre de la cloison.

Considérons deux cas. Dans un premier temps, la cloison est soumise à une force extérieure,  $f_e \neq 0$ . De plus on suppose qu'il n'y a pas de source acoustique dans  $x > 0$ ,  $S^+ = 0$ . C'est le phénomène de rayonnement acoustique d'une structure vibrante. Dans un deuxième temps, on suppose que la force extérieure est nulle  $f_e = 0$  et qu'une acoustique située dans  $x < 0$  émet un champ acoustique ; la paroi est ainsi excitée par voie aérienne et on se trouve dans le cas de la transmission acoustique.

## 3.2 Rayonnement acoustique

Supposons donc qu'il n'y a pas de source d'énergie au sein du fluide. Seule la cloison est soumise à une force extérieure d'amplitude  $f_e$ . Les ondes acoustiques engendrées par la cloison, qui vibre en piston, se propagent donc vers  $x > 0$  et  $x < 0$  dans les demi-guides  $x > 0$  et  $x < 0$ . Les champs de pression  $p^\pm(x)$  sont solutions d'équations de Helmholtz unidimensionnelles homogènes ( $p''(x) + k^2 p(x) = 0$ ). Le principe de conservation de l'énergie (ou les conditions de Sommerfeld) indique que seules des ondes qui s'éloignent de la paroi ont un sens physique. Ceci implique que les pressions acoustiques soient de la forme  $p^\pm(x) = A^\pm e^{\pm kx}$ .

**EXERCICE.** Montrer que dans le domaine  $x > 0$ , l'onde propagative est donnée par  $p^+(x, \omega) = A^+ e^{ikx}$ .

**SOLUTION .** La solution générale de l'équation de Helmholtz s'écrit  $p^+(x, \omega) = A^+ e^{ikx} + B^+ e^{-ikx}$ . Ce qui correspond à une pression  $P^+(x, t) = p^+(x, \omega) e^{-i\omega t} = A^+ e^{ikx} + B^+ e^{-ikx} e^{-i\omega t}$ . Soit encore en regroupant les exponentielles :

$$P^+(x, t) = A^+ e^{-i\omega(t-x/c_0)} + B^+ e^{-i\omega(t+x/c_0)}.$$

Au cours du temps  $\Delta t > 0$ , on a deux ondes qui se déplacent, une vers les  $x > 0$  (ce qui implique  $\Delta x > 0$ ) et l'autre vers les  $x < 0$  (ce qui implique  $\Delta x < 0$ ). L'onde qui garde la phase (l'argument de l'exponentielle) constante pour  $\Delta x > 0$  est celle dont la phase est donnée par  $\Delta t - \Delta x/c_0 = \text{cte}$ . L'onde propagative dans  $x > 0$  correspond donc à  $e^{ikx}$ . De même, dans  $x < 0$ , l'onde propagative correspond à  $e^{-ikx}$ .

Les équations de continuité des vitesses normales s'écrivent :

$$\omega^2 \rho_0 u = \frac{dp^\pm(0)}{dx} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 \rho_0 u &= p^{+'}(0) \\ \omega^2 \rho_0 u &= p^{-'}(0). \end{cases}$$

Le système à résoudre s'écrit donc

$$\begin{aligned} -m(\omega^2 - \omega_0^2)u &= f_e - p^+(0) + p^-(0) \\ \omega^2 \rho_0 u &= p^{+'}(0) \\ \omega^2 \rho_0 u &= p^{-'}(0). \end{aligned}$$

Comme  $p^\pm(x) = A^\pm e^{\pm kx}$ , les inconnues sont alors  $u$ ,  $A^+$  et  $A^-$  et sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} A^+ - A^- - m(\omega^2 - \omega_0^2)u &= f_e \\ ikA^+ - \omega^2 \rho_0 u &= 0 \\ -ikA^- - \omega^2 \rho_0 u &= 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m(\omega^2 - \omega_0^2) \\ 1 & 0 & +i\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & 1 & -i\omega\rho_0 c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de ce système est donné par  $D = -2m(i\omega\rho_0 c_0/m + \omega^2 - \omega_0^2)$ . Il est facile de voir que du fait de l'amortissement par couplage avec le fluide, le déterminant de ce système n'est jamais nul et que sa solution existe toujours. Si  $\rho$  est nul,  $D$  est nul en  $\omega = \omega_0$  ce qui conduit à une indétermination du système. On obtient alors :

$$\begin{aligned} u &= -f_e \frac{1}{m(2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2)} \\ A^\pm &= \pm f_e \frac{i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m}}{2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

La pulsation propre  $\omega_0$  de la cloison a un rôle particulier. Si  $\omega = \omega_0$ , le déplacement de la paroi ainsi que les pressions rayonnées sont maximaux.

Les pressions  $p^\pm$  ont même module, ce qui est évident du fait de la symétrie du système par rapport à  $x$ . En outre, ces pressions sont de signe opposé. On a  $p^+(x) = -p^-(x) = \exp(i\pi)p^-(x)$ . Les pressions sont en opposition de phase. Ce résultat est aussi évident puisque, au cours de son mouvement lorsque la paroi se déplace vers les  $x > 0$ , elle crée une surpression dans  $x > 0$  et une dépression dans  $x < 0$ .

Calculons  $P_t$  la puissance totale moyenne (sur une période  $T$ ) fournie au système. Nous avons, par définition :

$$P_t = \frac{1}{T} \int_0^T \Re(F_e(t)) \Re(v(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \Re(f_e e^{-i\omega t}) \Re(-i\omega u e^{-i\omega t}) dt$$

Supposons que  $F_e \in \mathbb{R}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{T} \int_0^T f_e \cos(\omega t) \Re \left( i\omega \frac{f_e}{m(2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2)} e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_e^2 \cos(\omega t) \Re \left( i\omega \frac{-2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2}{m(4\omega^2 (\frac{\rho_0 c_0}{m})^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)} e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{f_e^2}{m(4\omega^2 (\frac{\rho_0 c_0}{m})^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)} \int_0^T \cos(\omega t) \left( 2\omega^2 \frac{\rho_0 c_0}{m} \cos(\omega t) + \omega(\omega^2 - \omega_0^2) \sin(\omega t) \right) dt \\ &= \frac{f_e^2}{m(4\omega^2 (\frac{\rho_0 c_0}{m})^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)} \omega^2 \frac{\rho_0 c_0}{m}, \text{ car } \omega = \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $P_t > 0$ . Si  $\omega = \omega_0$ , la puissance totale admise est maximale et vaut  $P_t = F_e^2 / (4\rho_0 c_0)$ .

De même, on peut définir la puissance moyenne transmise dans chaque demi-guide  $P_t^\pm$  comme la moyenne sur une période de la puissance instantanée  $P_i^\pm$  qui traverse une section du guide à

l'abscisse  $x$ .  $P_i^\pm$  est donnée par  $P_i^\pm(t) = \text{Re}(p^\pm(x, \omega) \exp(-i\omega t)) \Re(v^\pm(x, \omega) \exp(-i\omega t))$ , où  $v^\pm(x, \omega) = 1/(i\omega\rho) dp^\pm(x, \omega)/dx$  est la vitesse vibratoire instantanée du fluide.

$$P^\pm = \frac{1}{T} \int_0^T P_i^\pm(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \Re(p^\pm(x, t)) \Re(v^\pm(x, t)) dt.$$

On monte facilement que  $P^\pm = P_t/2$ .

**EXERCICE.** Le montrer.

**SOLUTION .** Comme la puissance transmise se conserve dans le guide, on peut simplifier les calculs en se plaçant en  $x = 0$ .

### 3.3 Approximation “fluide léger”

Introduisons le paramètre  $\epsilon = \rho_0 c_0/m$ . Si la masse volumique du fluide est faible devant la masse de la cloison, nous avons  $\epsilon \ll 1$ . Développons  $u$  et  $A^\pm$  en série de puissances croissantes de  $\epsilon$ . Il vient :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ A^\pm &= A_0^\pm + \epsilon A_1^\pm + \epsilon^2 A_2^\pm + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Repartons du système d'équations initiales

$$\begin{aligned} A^+ - A^- - m(\omega^2 - \omega_0^2)u &= f_e \\ ikA^+ - \omega^2 \rho_0 u &= 0 \\ -ikA^- - \omega^2 \rho_0 u &= 0. \end{aligned}$$

Dans lequel nous mettons en évidence  $\epsilon = \rho_0 c_0/m$ . Par exemple, considérons  $ikA^+ - \omega^2 \rho_0 u = 0$ . Nous obtenons  $A^+ + i\rho_0 c_0 \omega u = 0$  soit  $A^+/m + i\epsilon \omega u = 0$ . D'où le système

$$\begin{aligned} \frac{A^+}{m} - \frac{A^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2)u &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A^+}{m} + i\epsilon \omega u &= 0 \\ \frac{A^-}{m} - i\epsilon \omega u &= 0. \end{aligned}$$

Portons dans ce système les développements en série de perturbation limités à l'ordre 1. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+ + \epsilon A_1^+}{m} - \frac{A_0^- + \epsilon A_1^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2)(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A_0^+ + \epsilon A_1^+}{m} + i\epsilon \omega(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \frac{A_0^- + \epsilon A_1^-}{m} - i\epsilon \omega(u_0 + \epsilon u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

soit, en regroupant les termes de même puissance de  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+}{m} - \frac{A_0^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2)u_0 + \epsilon \left\{ \frac{A_1^+}{m} - \frac{A_1^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2)u_1 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A_0^+}{m} + \epsilon \left\{ \frac{A_1^+}{m} + i\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \frac{A_0^-}{m} + \epsilon \left\{ \frac{A_1^-}{m} - i\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à évaluer les termes des puissances identiques de  $\epsilon$ . Pour justifier ceci, faisons tendre  $\epsilon$  vers zéro dans le système précédent. Nous obtenons le système à l'ordre zéro en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{A_0^+}{m} - \frac{A_0^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2) u_0 &= \frac{f_e}{m} \\ \frac{A_0^+}{m} &= 0 \\ \frac{A_0^-}{m} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous reportons ce résultat dans le système précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon \left\{ \frac{A_1^+}{m} - \frac{A_1^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2) u_1 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \epsilon \left\{ \frac{A_1^+}{m} + i\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0 \\ \epsilon \left\{ \frac{A_1^-}{m} - i\omega u_0 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= 0. \end{aligned}$$

Si nous divisons par  $\epsilon$  et faisons tendre le reste vers zéro avec  $\epsilon$ , nous obtenons le système à l'ordre un en  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \frac{A_1^+}{m} - \frac{A_1^-}{m} - (\omega^2 - \omega_0^2) u_1 &= 0 \\ \frac{A_1^+}{m} + i\omega u_0 &= 0 \\ \frac{A_1^-}{m} - i\omega u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Le système à l'ordre zéro est trivial à résoudre. On a  $A_0^\pm = 0$  et  $u_0 = -f_e/m(\omega^2 - \omega_0^2)$  qui n'est autre que la solution en l'absence de fluide (masse ressort dans le vide et nullité de la pression acoustique).

Le système à l'ordre un se résout en fonction de la solution à l'ordre zéro. Ceci est général à toutes les méthodes de perturbation dans lesquelles la solution à un ordre donné dépend de la solution à l'ordre (ou aux ordres) inférieur(s). On a

$$\begin{aligned} A_1^\pm &= \mp im\omega u_0 = \pm \frac{i\omega f_e}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ u_1 &= \frac{A_1^+ - A_1^-}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = -\frac{2i\omega u_0}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2i\omega f_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

ce résultat s'interprète aisément si on remarque que l'amplitude de la pression à l'ordre un correspond à celle que rayonne le système masse-ressort dans le vide. De même le déplacement à l'ordre un correspond au déplacement du système masse-ressort lorsque la force excitatrice correspond à celle due à la différence de pression, créée par le déplacement de la cloison en l'absence de fluide, de part et d'autre de la cloison.

**EXERCICE.** Calculer la solution à l'ordre 2 en  $\epsilon$ .

**SOLUTION .** On obtient

$$\begin{aligned} A_2^\pm &= \mp im\omega u_1 \\ u_2 &= \frac{A_2^+ - A_2^-}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{-2i\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} u_1, \end{aligned}$$

Notons que ce dernier résultat peut se généraliser à

$$u_m = -2\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)u_{m-1} = (-2\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2))^m u_0.$$

Nous obtenons ainsi le développement

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \epsilon^m u_m = u_0 \sum_m (-2\epsilon\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2))^m, \text{ or } \sum_m (-x)^m = \frac{1}{1+x}, \text{ soit} \\ u &= \frac{u_0}{1 + 2\epsilon\imath\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ &= -\frac{f_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\epsilon\imath\omega)}. \end{aligned}$$

On peut conclure ainsi que le développement en série de perturbation, lorsqu'il existe et lorsqu'il peut être poussé aussi loin que l'on veut, conduit à la solution exacte. Par contre, il est rare que les séries obtenues convergent. En général on obtient des séries asymptotiques. Ces séries, pour une valeur fixée des paramètres, sont divergentes et pour chaque problème il existe un seul nombre de termes qui conduise à une approximation optimale.

Vérifions ces calculs en repartant de la solution exacte  $u$  et  $A^\pm$  que nous écrivons en fonction des puissances croissantes de  $\epsilon$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{F_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{1}{1 + \frac{2\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2}} \\ &= -\frac{F_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left( 1 - \frac{2\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2} + \left( \frac{2\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ A^\pm &= \pm F_e \frac{\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2} \left( 1 - \frac{2\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2} + \left( \frac{2\imath\omega\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Égalons les coefficients des puissances de  $\epsilon$ . Nous obtenons :  
termes en  $\epsilon^0 = 1$  :

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{F_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ A_0^\pm &= 0, \end{aligned}$$

termes en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{F_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = u_0 \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ A_1^\pm &= \pm F_e \frac{\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \mp u_0 \frac{-\imath\omega}{m} \end{aligned}$$

termes en  $\epsilon^2$  :

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{F_e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left( \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 = u_1 \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ A_2^\pm &= \pm F_e \frac{\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = A_1^\pm \frac{-2\imath\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la validité du calcul précédent. Bien évidemment, sur cet exemple simple, le travail nécessaire à la résolution du problème en série de perturbation est comparable à celui qu'il a fallu

fournir pour résoudre le problème exact. Lorsque le problème à résoudre est plus complexe, il devient difficile voire impossible de résoudre le problème exact, alors que les équations de perturbation restent abordables.

Ces résultats appellent plusieurs commentaires. Remarquons que plus que  $\epsilon$ , ces développements font intervenir le rapport

$$\eta = \frac{\epsilon}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

De fait, la vraie condition de convergence de ces développements porte sur  $\eta$  et non sur  $\epsilon$ . La nuance est importante car au voisinage de la pulsation propre de la paroi,  $\eta$  peut être grand alors que  $\epsilon$  peut être petit. Ces calculs sont donc valables "loin" de la fréquence propre de la cloison. Notons que la méthode qui consiste à résoudre un problème de couplage fluide-structure en négligeant l'influence du fluide sur le déplacement et en calculant la pression rayonnée par la structure à partir de son déplacement dans le vide est couramment utilisée (sans toujours recevoir de justification rigoureuse comme celle proposée ci-dessus...).

### 3.4 Transmission du son

Pour simplifier l'exposé, nous pouvons supposer qu'il n'y a pas de sources acoustiques dans  $x < 0$  mais que la pression acoustique  $p^-$  est la somme d'une onde plane d'amplitude unité  $e^{ikx}$  (la source  $s^-$  est rejetée à l'infini) et d'une onde réfléchie par la paroi à déterminer  $p_r$ . Nous avons donc  $p^- = e^{ikx} + p_r$ . Les pressions acoustiques  $p^\pm(x)$  vérifient toutes deux une équation de Helmholtz homogène. Le principe de conservation de l'énergie implique que nous ayons :

$$p_r(x, \omega) = R(\omega)e^{-ikx} \text{ et } p^+(x, \omega) = T(\omega)e^{ikx}.$$

C'est à dire d'une onde réfléchie par la cloison qui se dirige vers les  $x < 0$  et d'une onde transmise qui se dirige vers les  $x > 0$ . Déterminons  $u(\omega)$ ,  $R(\omega)$  le coefficient de réflexion et  $T(\omega)$  le coefficient de transmission. L'équation du système masse-ressort s'écrit

$$-m\omega^2 u + ru = -p^+(0) + p^-(0) \Rightarrow m(\omega^2 - \omega_0^2)u + R - T = -1.$$

Les équations de continuité des vitesses normales s'écrivent :

$$\omega^2 \rho_0 u = \frac{dp^\pm(0)}{dx} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 \rho_0 u - ikT = 0 \\ \omega^2 \rho_0 u - ik(1 - R) = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons encore un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m(\omega^2 - \omega_0^2) \\ 1 & 0 & -i\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & -1 & -i\omega\rho_0 c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ T \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant  $\Delta$  est donné par  $\Delta = -m(2i\omega\rho_0 c_0/m + \omega^2 - \omega_0^2)$ . Il est facile de voir que  $\Delta$  n'est jamais nul pour une fréquence d'excitation réelle. De lé, il est facile d'en déduire

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -1 & -1 & m(\omega^2 - \omega_0^2) \\ 1 & 0 & -i\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & -1 & -i\omega\rho_0 c_0 \end{vmatrix} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2i\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2} \\ T &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & -1 & m(\omega^2 - \omega_0^2) \\ 1 & 1 & -i\omega\rho_0 c_0 \\ 0 & 0 & -i\omega\rho_0 c_0 \end{vmatrix} = \frac{2i\omega\rho_0 c_0}{2i\omega\rho_0 c_0 + m(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ u &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{2i\omega\rho_0 c_0 + m(\omega^2 - \omega_0^2)}. \end{aligned}$$



Si  $\omega = \omega_0$  alors  $R = 0, T = 1, u = 1/(\omega_0 \rho_0 c_0)$ . La cloison transmet toute l'énergie de l'onde incidente. La cloison est transparente aux ondes acoustiques. Soit  $\tau$ , le rapport entre le puissance moyenne (sur une période) de l'énergie transmise par la cloison et la puissance moyenne incidente (ici unitaire). Nous avons  $\tau = TT^*$ . Soit

$$\tau = \frac{4\omega^2 \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2}{4\omega^2 \left(\frac{\rho_0 c_0}{m}\right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}.$$

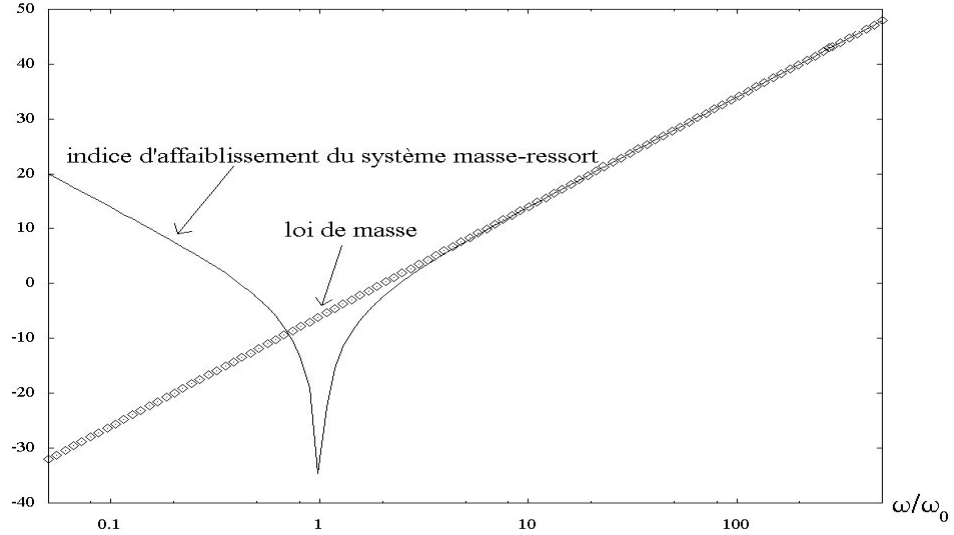


FIGURE 3.2 – Indice d'affaiblissement de la paroi et loi de masse

Soit  $i$ , l'indice d'affaiblissement acoustique qui est la différence de niveau entre l'onde incidente et l'onde transmise. Nous avons  $i = 10 \log_{10}(1/\tau)$ . Si  $\epsilon = \rho_0 c_0/m \ll 1$  (comme par exemple une paroi en béton au contact d'air), nous avons :

$$\tau = \frac{4\omega^2 \epsilon^2}{4\omega^2 \epsilon^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{4\epsilon^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2} + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Supposons en outre que la fréquence d'excitation soit suffisamment haute pour avoir  $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1$ . Nous avons alors

$$\tau \simeq \frac{4\rho^2 c_0^2}{m^2 \omega^2}, i = 20 \log_{10} \left( \frac{m\omega}{2\rho_0 c_0} \right).$$

Cette loi, valable "loin" de la fréquence propre de la paroi (haute fréquence), porte le nom de loi de masse et stipule que l'amplitude de l'onde transmise est inversement proportionnelle à la masse de la cloison. L'indice d'affaiblissement présente alors une pente de 6 dB par octave (voir figure 3.2) :  $i(2\omega) = i(\omega) + 20 \log_{10}(2) = i(\omega) + 6$ .

**PROBLÈMES.**

1. On considère le problème mono dimensionnel (voir figure 3.3) constitué d'un guide d'onde, de longueur  $\ell$ , fermé à l'extrémité  $x = 0$  par une cloison masse-ressort et en  $x = \ell$  par une paroi parfaitement rigide (condition de Neumann). Ce guide contient un fluide de masse linéique  $\rho$  et de célérité des ondes  $c_0$ . Ce système est une bonne approximation du caisson de haut-parleur en basse fréquence.
  - (a) Montrer que le système masse-ressort fluide comporte une infinité de fréquences propres.

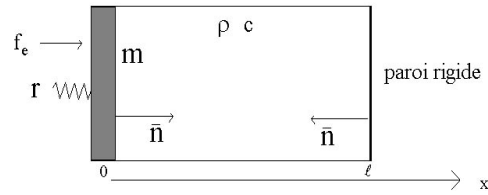


FIGURE 3.3 – Géométrie du guide fermé par une terminaison rigide

- (b) Calculer à basse fréquence le déplacement, en supposant que  $\omega\ell/c_0 \ll 1$ . Montrer dans ce cas que la présence de la lame d'air se réduit à un effet de raideur ajoutée.
2. Même problème que précédemment mais on remplace la paroi rigide en  $x = \ell$  par une paroi décrite par une condition de Dirichlet qui est une première approximation du tuyau débouchant à l'air libre.
- (a) Montrer que le système masse-ressort fluide comporte une infinité de fréquences propres.
- (b) Calculer à basse fréquence le déplacement, en supposant que  $\omega\ell/c_0 \ll 1$ . Montrer dans ce cas que la présence de la lame d'air se réduit à un effet de masse ajoutée.
3. On s'intéresse ici au problème de transmission par une paroi double (voir figure 3.4). On nomme

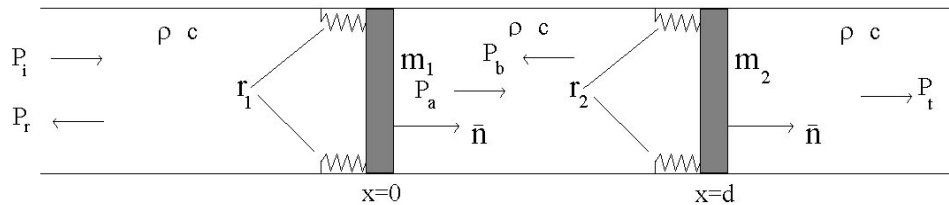


FIGURE 3.4 – Géométrie de la paroi double

$u_1$  le déplacement de la paroi en  $x = 0$  (paroi 1) et  $u_2$  celui de la paroi en  $x = d$  (paroi 2). On suppose que le champ incident est une onde plane unitaire  $p_i(x) = \exp(ikx)$ . Il est évident que l'on a :  $p_r(x) = R \exp(-ikx)$ ,  $p_a(x) = A \exp(ikx)$ ,  $p_b(x) = B \exp(-ikx)$  et  $p_t(x) = T \exp(ikx)$ .

- (a) Écrire les six équations du mouvement. On pose pour simplifier  $p_1 = p_i(0^-) + p_r(0^-)$ ,  $p_2 = p_a(0^+) + p_b(0^+)$ ,  $p_3 = p_a(d^-) + p_b(d^-)$  et  $p_4 = p_t(d^+)$ .
- (b) Dans toute la suite, on suppose que  $kd \ll 1$ .
- Montrer que la pression dans la cavité est uniforme.
  - Calculer la pression dans la cavité en fonction de la différence  $u_1 - u_2$  et montrer que l'air agit comme un ressort de raideur  $r_c = \rho_0 c_0^2/d$ .
  - Calculer le rapport  $u_1/u_2$  et montrer que lorsque  $d \rightarrow 0$ , les mouvements des parois sont identiques.
  - Calculer le coefficient de transmission  $T$ . Montrer que le fluide externe introduit un amortissement.
  - Si on néglige les raideurs mécaniques et l'amortissement acoustique, montrer que  $T$  est maximal pour la pulsation masse-air-masse  $\omega_0 = \sqrt{r_c(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$ . Calculer les indices d'affaiblissement pour  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$

1. Les équations du problème sont données par

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \quad & -m\omega^2 + ru = f_e - p(0) \\ & p'(0) = \omega^2 \rho_0 u \\ \text{en } x = \ell \quad & p'(\ell) = 0 \quad (\partial_n = 0 \Leftrightarrow -dp/dx = 0) \\ x \in ]0, \ell[ \quad & p''(x) + k^2 p(x) = 0 \end{aligned}$$

(a) L'équation de Helmholtz conduit à  $p(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ . Les trois premières équations du système précédent s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} -m(\omega^2 - \omega_0^2)u + A + B &= f_e \\ \omega \rho_0 c_0 u + A - B &= 0 \\ Ae^{ik\ell} - Be^{-ik\ell} &= 0. \end{aligned}$$

Pour montrer que le système masse-ressort-fluide comporte une infinité de fréquences propres, il suffit de montrer qu'il existe une infinité de fréquences réelles qui autorisent des solutions non nulles pour une force d'excitation nulle. C'est à dire qu'il existe des fréquences pour lesquelles le déterminant de la matrice associée au système linéaire d'équations simultanées ci-dessus est nul. Celui-ci est donnée par  $D = -2i(m(\omega^2 - \omega_0^2) \sin k\ell - \omega \rho_0 c_0 \cos k\ell)$ . Pour résoudre  $D = 0$ , il suffit de résoudre  $m(\omega^2 - \omega_0^2) \sin k\ell = \omega \rho_0 c_0 \cos k\ell$ , soit  $\tan \omega\ell/c_0 = \omega \rho_0 c_0 / m(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Résoudre cette équation transcendante est particulièrement ardu. Néanmoins, on a un moyen graphique simple pour estimer les racines (donc les fréquences propres) du déterminant. On cherche les points communs aux courbes  $\tan \omega\ell/c_0$  et  $\omega \rho_0 c_0 / m(\omega^2 - \omega_0^2)$ . On voit clairement figure (3.5), où les points d'intersection sont représentés par des disques, que l'on a une infinité de zéros et donc de fréquences propres. Si on analyse un plus finement ces points, ceux qui correspondent aux zéros de  $\tan \omega\ell/c_0$  sont les zéros légèrement décalés vers les aigus du système constitué d'une cavité rigide aux deux extrémités; ceci peut s'expliquer facilement par le fait le système masse ressort à l'origine rajoute un peu de raideur au système de cavité rigide du fait de la présence du ressort. On observe aussi que la fréquence propre du système masse-ressort est légèrement décalée vers les aigus, ceci est dû au fait que le fluide rajoute un peu de raideur au système masse-ressort.

(b) Le déplacement est donné par

$$u = -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega \rho_0 c_0 \cot \frac{\omega\ell}{c_0})}.$$

Pour  $\omega\ell/c_0 \ll 1$ , on a  $\cot \omega\ell/c_0 \approx 1/(\omega\ell/c_0)$ . Soit

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{\rho_0 c_0^2}{\ell})}.$$

Or  $\rho_0 c_0^2/\ell$  a une dimension de raideur  $[Kg][S]^2$ . On pose alors  $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \rho_0 c_0^2/m\ell > \omega_0^2$ . Et on obtient le déplacement d'un système masse-ressort à raideur augmentée.

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_1^2))}.$$

2. Avec les mêmes notations, seule change la condition en  $x = \ell$ , donnée par  $p(\ell) = 0$ . Les équations du problème sont données par

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \quad & -m\omega^2 + ru = f_e - p(0) \\ & p'(0) = \omega^2 \rho_0 u \\ \text{en } x = \ell \quad & p(\ell) = 0 \\ x \in ]0, \ell[ \quad & p''(x) + k^2 p(x) = 0 \end{aligned}$$

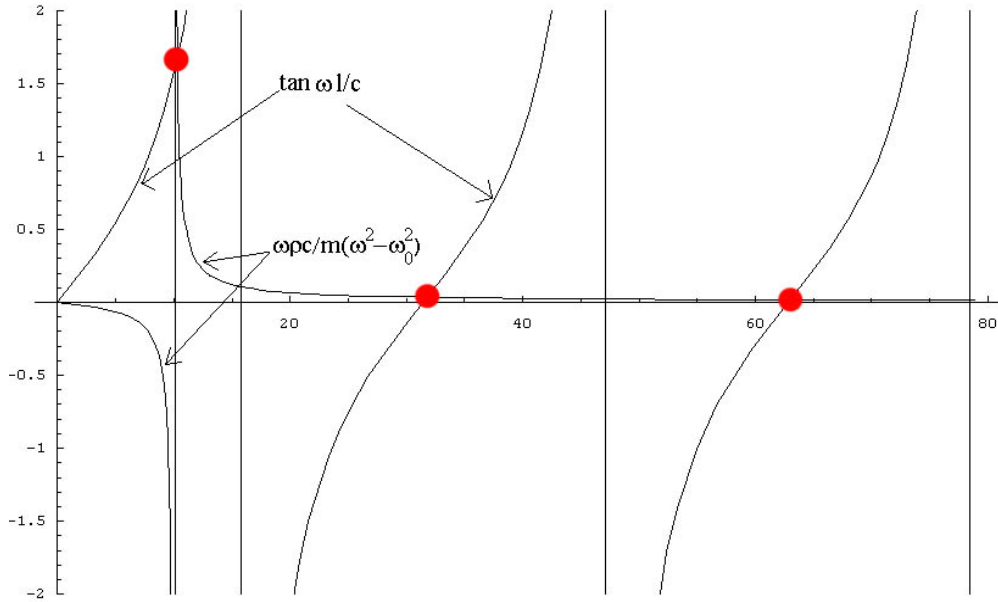


FIGURE 3.5 – Zéros du déterminant du système avec terminaison infiniment rigide

(a) On obtient le système

$$\begin{aligned} -m(\omega^2 - \omega_0^2)u + A + B &= f_e \\ i\omega\rho_0 c_0 u + A - B &= 0 \\ Ae^{ik\ell} + Be^{-ik\ell} &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est donné par  $D = -2i(m(\omega^2 - \omega_0^2) \cos k\ell + \omega\rho_0 c_0 \sin k\ell)$ . Pour résoudre  $D = 0$ , il suffit de résoudre  $\cot \omega\ell/c_0 = \omega\rho_0 c_0/m(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Comme précédemment, on procède graphiquement. On voit aisément sur la figure (3.6) que l'on a encore une infinité de fréquences propres. L'analyse fine de ces points montre que ceux qui correspondent aux zéros de  $\cot \omega\ell/c_0$  sont les zéros légèrement décalés vers les aigus du système constitué d'une cavité rigide à l'origine et molle à l'autre extrémité; ceci peut s'expliquer facilement par le fait le système masse ressort à l'origine rajoute toujours un peu de raideur au système de cavité rigide/molle du fait de la présence du ressort. Par contre, on observe que la fréquence propre du système masse-ressort est légèrement décalée vers les basses fréquences, ceci est dû à la masse du fluide quentraîne la paroi dans son mouvement.

(b) Le déplacement est donné par

$$u = -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega\rho_0 c_0 \tan \frac{\omega\ell}{c_0})}.$$

Pour  $\omega\ell/c_0 \ll 1$ , on a  $\tan \omega\ell/c_0 \approx \omega\ell/c_0$ . Soit

$$u \approx -\frac{f_e}{(m(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega^2 \rho_0 \ell)}.$$

Or  $\rho_0 \ell$  a une dimension de masse. On pose alors  $m_f = \rho_0 \ell$ . Et on obtient le déplacement d'un système masse-ressort à masse augmentée.

$$u \approx -\frac{f_e}{((m + m_f)\omega^2 - m\omega_0^2)},$$

qui traduit bien l'effet de masse ajoutée par la présence du fluide.

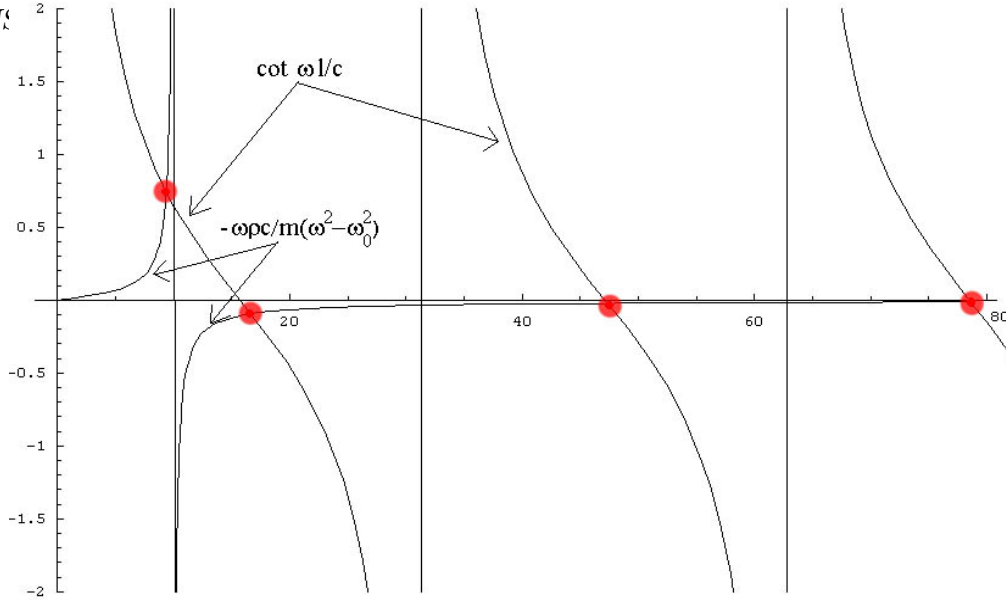


FIGURE 3.6 – Zéros du déterminant du système avec terminaison infiniment molle

3. On pose  $\omega_1^2 = r_1/m_1$  et  $\omega_2^2 = r_2/m_2$ ,  $p_1 = 1 + R$ ,  $p_2 = A + B$ ,  $p_3 = A \exp(ikd) + B \exp(-ikd)$  et  $p_4 = T \exp(ikd)$ .

(a) Pour une normale intérieure au système (dirigée vers les  $x > 0$  en  $x = 0$  et vers les  $x < 0$  en  $x = d$ ), on obtient le système

$$\begin{aligned} -m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1 &= p_2 - p_1 \\ -m_2(\omega^2 - \omega_2^2)u_2 &= p_3 - p_4 \\ \omega^2 \rho_0 u_1 &= p'_i(0) + p'_r(0) \Rightarrow -i\omega \rho_0 c_0 u_1 = 1 - R \\ \omega^2 \rho_0 u_1 &= p'_a(0) + p'_b(0) \Rightarrow -i\omega \rho_0 c_0 u_1 = A - B \\ \omega^2 \rho_0 u_2 &= p'_a(d) + p'_b(d) \Rightarrow -i\omega \rho_0 c_0 u_2 = A \exp(ikd) - B \exp(-ikd) \\ \omega^2 \rho_0 u_2 &= p'_t(d) \Rightarrow -i\omega \rho_0 c_0 u_2 = T \exp(ikd) \end{aligned}$$

(b) On suppose à partir d'ici que  $kd \ll 1$ .

- i. La pression dans la cavité est donnée par  $p_c = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ . Si  $kd \ll 1$  alors pour tout  $x \in ]0, d[$  on a  $kx \ll 1$  et  $\exp(\pm ikx) \approx 1$  ainsi  $p_c \approx A + B$  qui est bien uniforme.
- ii. On part de  $-i\omega \rho_0 c_0 u_2 A \exp(ikd) + B \exp(-ikd)$  et on développe chaque terme en série de Taylor à l'ordre 1  $-i\omega \rho_0 c_0 u_2 A(1 + ikd) + B(1 - ikd) = A - B + ikd(A + B)$ . Or, on sait que  $A + B = p_c$  et que  $-i\omega \rho_0 c_0 u_1 = A - B$ . De lé, on tire  $-i\omega \rho_0 c_0 (u_2 - u_1) = ikd p_c$ . D'où l'expression de la pression dans la cavité  $p_c = \rho_0 c_0^2 / d (u_2 - u_1)$ . Il est alors évident de voir que l'air agit comme un ressort de raideur  $r_c = \rho_0 c_0^2 / d$ .
- iii. On part de  $-m_2(\omega^2 - \omega_2^2)u_2 = p_3 - p_4 = p_c - p_4$ , or, par l'équation de continuité,  $p_4 = -i\omega \rho_0 c_0 u_2$ . On en déduit  $-m_2(\omega^2 - \omega_2^2)u_2 = p_c + i\omega \rho_0 c_0 u_2 = r_c(u_1 - u_2) + i\omega \rho_0 c_0 u_2$ . Donc, on obtient  $-m_2(\omega^2 - \omega_2^2) = r_c(u_1/u_2 - 1) + i\omega \rho_0 c_0$ . Après quelques transformations élémentaires, on en déduit l'expression du rapport des déplacements des parois  $u_1/u_2 = (r_c - m_2(\omega^2 - \omega_2^2) - i\omega \rho_0 c_0) / r_c$ . Si  $d \rightarrow 0$ ,  $r_c \rightarrow \infty$  et  $u_1/u_2 \rightarrow 1$ . Donc lorsque  $d$  est très petit, l'air se comporte comme un ressort de raideur infinie, c'est à dire comme une liaison rigide et donc  $u_1 = u_2$ .

iv. On part de  $-\omega\rho_0c_0u_1 = 1 - R$ . Comme  $p_1 = 1 + R$ , alors  $-\omega\rho_0c_0u_1 = 2 - p_1$  soit  $p_1 = 2 + \omega\rho_0c_0u_1$ . D'autre part, l'équation du mouvement de la paroi 1 donne  $p_1 = p_2 - m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1$ , soit  $p_1 = p_c - m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1 = r_c(u_1 - u_2) - m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1$ , soit encore  $2 + \omega\rho_0c_0u_1 = r_c(u_1 - u_2) - m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1$  que l'on divise par  $u_2$  :  $2/u_2 + \omega\rho_0c_0u_1/u_2 = r_c(u_1/u_2 - 1) - m_1(\omega^2 - \omega_1^2)u_1/u_2$ . On réarrange cette expression  $2/u_2 = u_1/u_2(r_c - m_1(\omega^2 - \omega_1^2) - \omega\rho_0c_0) - r_c$ . Or, nous savons que  $-\omega\rho_0c_0u_2 = T \exp(ikd) = T$  si  $d \ll 1$  donc  $2/u_2 = -2\omega\rho_0c_0u_2/T$ . Soit encore

$$\begin{aligned} -\frac{2\omega\rho_0c_0}{T} &= \frac{u_1}{u_2}(r_c - m_1(\omega^2 - \omega_1^2) - \omega\rho_0c_0) - r_c \\ &= \frac{r_c - m_2(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega\rho_0c_0}{r_c}(r_c - m_1(\omega^2 - \omega_1^2) - \omega\rho_0c_0) - r_c \\ \Rightarrow T &= -\frac{2\omega\rho_0c_0r_c}{(r_c - m_2(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega\rho_0c_0)(r_c - m_1(\omega^2 - \omega_1^2) - \omega\rho_0c_0) - r_c^2} \end{aligned}$$

On voit apparaître clairement l'effet du fluide externe comme un amortissement  $\omega\rho_0c_0$ .

v. On néglige  $\omega\rho_0c_0$  et les raideurs  $r_1$  et  $r_2$  (ce qui revient à imposer  $\omega_1$  et  $\omega_2$  nuls) devant la raideur introduite par le fluide interne. On a alors

$$\begin{aligned} T &= -\frac{2\omega\rho_0c_0r_c}{(r_c - m_2\omega^2)(r_c - m_1\omega^2) - r_c^2} \\ T &= -\frac{2\omega\rho_0c_0r_c}{\omega^2(m_1m_2\omega^2 - (m_1 + m_2)r_c)} \end{aligned}$$

Il est alors évident que  $T$  est maximal pour  $\omega_0 = \sqrt{(m_1 + m_2)r_c/m_1m_2}$ , pulsation masse-air-masse. On pose  $T = -2\omega\rho_0c_0r_c/(m_1m_2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2))$ .

$$\begin{aligned} \text{si } \omega \gg \omega_0, \quad T &\approx \frac{2\rho_0c_0r_c}{\omega m_1m_2\omega_0^2} \\ &\approx \frac{2\rho_0c_0}{\omega(m_1 + m_2)} \\ \text{si } \omega \gg \omega_0, \quad T &= -\frac{2\rho_0c_0r_c}{\omega^3m_1m_2}. \end{aligned}$$

Car on sait que  $m_1m_2\omega_0^2 = r_c(m_1 + m_2)$ . On rappelle que  $i = -20 \log_{10} |T|$ .

$$\begin{aligned} \text{si } \omega \gg \omega_0, \quad i &= -20 \log_{10} \frac{2\rho_0c_0}{\omega(m_1 + m_2)} : \text{loi de masse } m_1 + m_2 \text{ à } -6\text{dB par octave} \\ \text{si } \omega \gg \omega_0, \quad i &= -20 \log_{10} \frac{2\rho_0c_0r_c}{\omega^3m_1m_2} : \text{loi de raideur } r_c \text{ à } -18\text{dB par octave.} \end{aligned}$$

Aux basses fréquences, l'atténuation qu'apporte un double vitrage (par rapport au simple vitrage) est principalement dé à la masse ajoutée par la deuxième paroi alors qu'aux hautes fréquences, le gain est dé à la faible distance inter parois et ce bien entendu, en dehors des fréquences propres des parois.

### 3.5 Régime transitoire

Supposons qu'il n'y a pas de sources au sein du fluide et que  $F_e(t)$  débute à  $t = 0$ . Le déplacement de la paroi est alors donné par la transformée de Fourier inverse du déplacement en régime harmonique c'est à dire par l'intégrale de Fourier

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(\omega)}{m(2i\omega \frac{\rho_0c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Pour simplifier un peu les calculs, nous pouvons supposer que  $F_e(t) = \delta(t) \Rightarrow f_e(\omega) = 1$ , et n'avoir à calculer que la réponse impulsionnelle de la paroi  $U_\delta(t)$

$$U_\delta(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{m \left( 2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2 \right)} d\omega.$$

L'intégrand est une fonction méromorphe et le calcul explicite de cette intégrale peut s'effectuer par la méthode des résidus sur l'un ou l'autre des contours  $C^\pm$  constitués de la droite réelle limitée par  $\pm R$  et du demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur ou inférieur (voir figure 3.7).

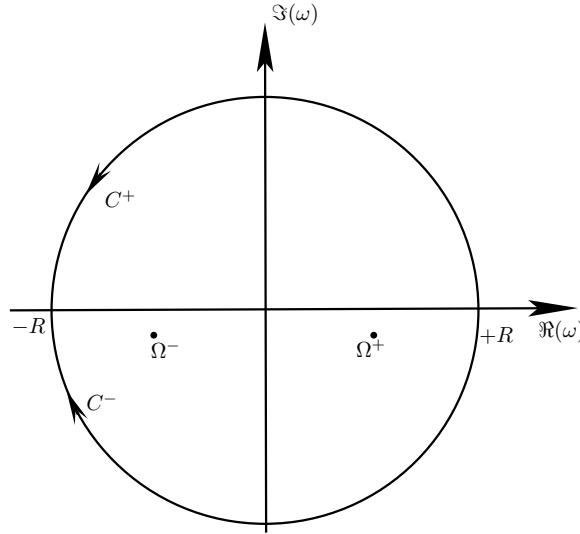


FIGURE 3.7 – Contour d'intégration

A priori il est loisible d'intégrer sur l'un ou l'autre des contours définis, voire même sur tout contour qui contient l'axe réel. On a alors :

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{C^\pm} \frac{e^{-i\omega t}}{m \left( 2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2 \right)} d\omega = -\frac{\pm 2i\pi}{2\pi} \sum_{res(C^\pm)} \frac{e^{-i\omega t}}{m \left( 2i\omega \frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2 \right)}$$

où  $res(C^\pm)$  sont les résidus de l'intégrand dans le contour considéré. On a un signe + lorsqu'on intègre sur  $C^+$  et un signe - lorsqu'on intègre sur  $C^-$  car on tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique. Toutefois, pour que la méthode ait un intérêt pour notre problème, il convient de choisir le contour qui permet, par le lemme de Jordan, d'annuler l'intégrale sur le demi-cercle lorsque l'on passe à la limite  $R \rightarrow \infty$ . Le choix du contour est de fait simple. Pour garder à l'exponentielle une valeur finie et pouvoir appliquer le lemme de Jordan (intégrand nul à l'infini sur  $C^\pm$ ), il faut intégrer sur  $C^+$  pour  $t < 0$  et sur  $C^-$  pour  $t > 0$ . Examinons maintenant les zéros du dénominateur de l'intégrand. Il est évident de voir que l'on a un polynôme de degré 2 en  $\omega$ . Nous supposons le discriminant  $\Delta' = \omega_0^2 - (\rho_0 c_0/m)^2$  strictement positif. Il est évident de voir que les racines sont alors :

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= -i \frac{\rho_0 c_0}{m} + \sqrt{\omega_0^2 - \left( \frac{\rho_0 c_0}{m} \right)^2} = \dot{\Omega} - i \hat{\Omega} \\ \Omega^- &= -i \frac{\rho_0 c_0}{m} - \sqrt{\omega_0^2 - \left( \frac{\rho_0 c_0}{m} \right)^2} = -\dot{\Omega} - i \hat{\Omega} = -(\Omega^+)^* \end{aligned}$$

avec  $\dot{\Omega} > 0$  et  $\hat{\Omega} > 0$ . Comme ces racines sont toutes deux de partie imaginaire négative, le contour  $C^+$  ne contient aucun pôle et ainsi, pour  $t < 0$ , on a  $U_\delta(t) = 0$  ce qui satisfait bien le principe de

causalité. Pour  $t > 0$ , on obtient avec  $z - z^* = 2\Im[z]$

$$U_\delta(t) = \frac{\imath}{2m} \left[ \frac{e^{-\imath\Omega^+t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} + \frac{e^{-\imath\Omega^-t}}{\Omega^- + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} \right] = \frac{1}{m} \Im \left[ \frac{e^{-\imath\hat{\Omega}t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} \right] e^{-\hat{\Omega}t} = \frac{\sin \hat{\Omega}t}{m\hat{\Omega}} e^{-\hat{\Omega}t}$$

Comme  $\hat{\Omega}$  et  $\hat{\Omega}$  sont tous deux positifs,  $U_\delta(t)$  est une oscillation amortie, d'autant plus que  $\hat{\Omega} = \rho_0 c_0/m$  est grand. C'est à dire que le fluide est de densité élevée ou que la masse de la paroi est faible, ou encore que le paramètre de perturbation  $\epsilon$  est fort.

La pression acoustique dans le guide  $x > 0$  est donnée, avec  $A^+(\omega)$  calculé pour  $f_e = 1$ , par

$$\begin{aligned} P_\delta^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^+(\omega) e^{+\imath kx} e^{-\imath\omega t} d\omega, \\ P_\delta^+(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\imath\omega\rho_0 c_0}{m(2\imath\omega\frac{\rho_0 c_0}{m} + \omega^2 - \omega_0^2)} e^{-\imath\omega(t - \frac{x}{c_0})} d\omega. \end{aligned}$$

du fait du terme  $\exp(-\imath\omega(t - x/c_0))$ , il est nécessaire d'intégrer sur  $C^+$  pour  $t < x/c_0$ . Ainsi la pression est nulle pour  $t < x/c_0$  ce qui correspond au temps que met l'onde sonore à atteindre le point d'abscisse  $x$ . On obtient, avec  $z + z^* = 2\Re[z]$ , pour  $t > \frac{x}{c_0}$

$$\begin{aligned} P_\delta^+(x, t) &= -\frac{\rho_0 c_0}{m} \Re \left[ \frac{\Omega^+}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} e^{-\imath\hat{\Omega}(t - \frac{x}{c_0})} \right] e^{-\hat{\Omega}(t - \frac{x}{c_0})} \\ &= -\hat{\Omega} \Re \left[ \frac{\hat{\Omega}^+ - \imath\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}} e^{-\imath\hat{\Omega}(t - \frac{x}{c_0})} \right] e^{-\hat{\Omega}(t - \frac{x}{c_0})} \\ &= -\hat{\Omega} \left( \cos \hat{\Omega} \left( t - \frac{x}{c_0} \right) - \frac{\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}} \sin \hat{\Omega} \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \right) e^{-\hat{\Omega}(t - \frac{x}{c_0})}. \end{aligned}$$

Si on s'intéresse à une excitation temporelle autre qu'une impulsion de Dirac, deux méthodes existent. Soit on calcule directement la transformée de Fourier de  $u(\omega)$  et on obtient

$$U(t) = -\frac{1}{m} \Im \left[ f_e(\Omega^+) \frac{e^{-\imath\hat{\Omega}t}}{\Omega^+ + \imath\frac{\rho_0 c_0}{m}} \right] e^{-\hat{\Omega}t},$$

si  $f_e(\Omega^{+*}) = -f_e^*(\Omega^+)$ , ou bien on calcule la réponse du système par convolution temporelle entre la réponse impulsionnelle et l'excitation. Par exemple, si  $F_e(t) \neq 0$  pour  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^t U_\delta(t - \tau) F_e(\tau) d\tau, t < T \\ U(t) &= \int_0^T U_\delta(t - \tau) F_e(\tau) d\tau, t \geq T. \end{aligned}$$

Les pôles de l'intégrand ont une interprétation physique simple. Ils correspondent aux oscillations libres du système, c'est à dire aux solutions des équations amorties en l'absence de toute excitation. Il est alors facile de voir que les seules solutions non nulles ont une dépendance temporelle de type  $\exp(-\imath\Omega^+t)$ . Ces pulsations sont les pulsations de résonance. Elles se distinguent des pulsations propres pour les systèmes dont l'amortissement dépend de la fréquence, comme cela est le cas du couplage ou plus généralement dans tout type d'amortissement lié au matériau (viscoélasticité, thermoélasticité) ou aux conditions aux limites.

**EXERCICE.** Calculer la réponse temporelle du piston lorsque  $\rho_0 c_0/m > \omega_0$ .



**SOLUTION** . Les racines du dénominateur s'écrivent toujours  $\Omega^\pm = -i\rho_0c_0/m \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\rho_0c_0/m)^2}$ . Pour  $\rho_0c_0 > m\omega_0$ , on pose  $\beta = \omega_0m/\rho_0c_0, 0 < \beta < 1$ . On a alors  $\Omega^\pm = -i\rho_0c_0/m(1 \mp \sqrt{1-\beta^2})$ . Puisque les racines sont de partie imaginaire négative, la réponse du piston est toujours causale et on a pour  $t > 0$

$$\begin{aligned} U_\delta(t) &= \frac{i}{2m} \left[ \frac{e^{-i\Omega^+t}}{\Omega^+ + i\frac{\rho_0c_0}{m}} + \frac{e^{-i\Omega^-t}}{\Omega^- + i\frac{\rho_0c_0}{m}} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[ \frac{e^{-\frac{\rho_0c_0}{m}(1-\sqrt{1-\beta^2})t}}{\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^{-\frac{\rho_0c_0}{m}(1+\sqrt{1-\beta^2})t}}{-\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[ \frac{e^{\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t}}{\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^{-\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t}}{\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} \right] e^{-\frac{\rho_0c_0}{m}t} \\ &= \frac{1}{m} \frac{\sinh\left(\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}t\right)}{\frac{\rho_0c_0}{m}\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\frac{\rho_0c_0}{m}t}. \end{aligned}$$

On pose  $\epsilon = \rho_0c_0/m$  et  $\alpha = \epsilon\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\epsilon^2 - \omega_0^2}$ . On a  $U_\delta(t) = 1/m\alpha \sinh(\alpha t) \exp(-\epsilon t)$ . Le déplacement de la paroi est une fonction non oscillante du temps. On parle d'amortissement sur-critique. Le déplacement commence par croître jusqu'au temps  $t_m = 1/2\alpha \ln((\epsilon + \alpha)/(\epsilon - \alpha)) = 1/\sqrt{\epsilon^2 - \omega_0^2} \operatorname{arccosh}(\epsilon/\omega_0)$  jusqu'à une amplitude maximale  $A_m = \exp(-t_m\epsilon)/m\omega_0$  puis décroît exponentiellement. On donne un exemple de mouvement d'une paroi figure (3.8) pour une masse  $m = 1$ ,  $\omega_0 = 10$ ,  $\epsilon = 10$  pour la courbe continue et  $\epsilon = 20$  et  $\epsilon = 50$  pour les courbes discontinues. En pratique, ce cas peut se présenter pour une masse légère, associée à un ressort de faible raideur ; dans l'air ce n'est pratiquement jamais observé (même pour une membrane de haut-parleur) ; il n'y a que pour un couplage avec un fluide de forte densité comme l'eau qu'on peut observer ce phénomène d'amortissement surcritique par couplage.

On peut aussi noter que lorsque  $\epsilon$ , l'amortissement par rayonnement, augmente, l'amplitude maximale de la paroi diminue ainsi que le temps mis à atteindre cette valeur. Par contre la décroissance temporelle de l'amplitude est moins rapide. On aboutit à un résultat un peu paradoxal pour lequel augmenter l'amortissement ne conduit pas systématiquement à une amplitude de mouvement plus faible. En pratique, on a une valeur optimale de l'amortissement (optimale au sens de la décroissance la plus rapide) qui est telle que  $\alpha = 0$ , soit  $\epsilon = \omega_0$  ou encore  $\rho_0c_0/m = \sqrt{r/m}$  soit encore  $\rho_0c_0 = \sqrt{rm}^1$ .

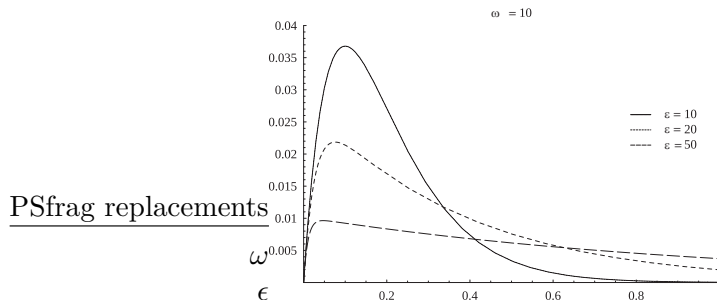


FIGURE 3.8 – Exemple de mouvements de paroi en amortissement critique ( $\omega_0 = \epsilon$ ) et sur-critique ( $\omega_0 > \epsilon$ ) pour quelques valeurs de  $\epsilon$

1. On retrouve lé un résultat classique qui dit que l'amortissement optimal d'un système masse-ressort-amortisseur est obtenu pour une valeur d'amortissement égale à deux fois la racine carrée du produit entre la masse et la raideur.

**EXERCICE.** En l'absence de fluide, une manière simple d'introduire un amortissement dans un système mécanique consiste à traduire la perte d'énergie sous la forme d'une raideur complexe  $r = r_0(1 - i\eta)$ , ou  $0 < \eta \ll 1$  est le facteur d'amortissement (ou angle de perte). Montrer que cette méthode conduit à une réponse non causale.

**SOLUTION .** *Le mouvement de la paroi amortie en l'absence de fluide est donné en régime harmonique par  $u(\omega) = -f_e/m(\omega^2 - \omega_0^2(1 - i\eta))$ . Les pulsations de résonances  $\Omega^\pm = \pm\omega_0(1 - i\eta/2)$  si  $\eta \ll 1$  ont leurs parties réelle et imaginaire de signe opposé. Comme on a deux racines de parties imaginaires de signe opposé, on ne peut pas avoir de réponse causale.*

## Chapitre 4

# Rayonnement acoustique de plaques minces

Nous allons traiter ici quelques exemples simples de plaques minces, immergées dans un fluide parfait au repos, et excitées par des forces extérieures. Dans un premier temps, nous commencerons par une plaque indéfinie et nous examinerons sous quelles conditions une onde plane de flexion peut se propager dans la plaque et éventuellement, rayonner de l'énergie. Ensuite, nous envisagerons la réponse du système plaque-fluide lorsqu'une force ponctuelle excite la structure. Nous verrons en particulier que le calcul de la pression rayonnée en champ lointain s'effectue simplement. Dans chacun des deux cas, nous nous intéressons au cas pour lequel le fluide n'a que peu d'influence sur le comportement de la structure (comme une plaque en acier dans l'air). Cette hypothèse est connue sous le nom d'approximation "fluide léger" bien que la gravité ne joue aucun rôle dans ce cas. Cette hypothèse permet de développer quelques approximations analytiques qui sont bien utiles tant pour la compréhension de la physique sous-jacente que pour la validation de codes de calculs. Nous traiterons ensuite un cas un peu moins simpliste, celui d'une structure de dimension finie, prolongée par un plan parfaitement réfléchissant qui s'étend à l'infini. On parle souvent (et incorrectement) de structure bafflée. La présence du baffle (...) est assez peu réaliste mais permet de mener des calculs plus simples, tout en dégagant les idées essentielles, que ceux qui apparaissent dans le cas d'une structure non bafflée. Dans ce dernier cas en effet, interviennent des effets de diffraction par les bords de la plaque qui sont délicats à traiter théoriquement et numériquement. Nous montrerons comment le problème aux limites d'équations différentielles couplées se ramène à un problème intégral aux limites moins difficile à traiter. Nous envisagerons alors trois méthodes "exactes" de résolution de ce type de problème. Dans la première nous transformerons le problème intégral initial en deux équations intégrales couplées dont nous proposerons une solution numérique. L'intérêt de ce genre de méthode tient au fait que la dimension du problème est diminuée d'un ordre de grandeur et que les approximations des fonctions se font sur des valeurs au bord du domaine. L'équation de propagation des ondes est parfaitement respectée. Dans la seconde, nous exprimons le déplacement de la plaque couplée en série de modes propres de la plaque dans le vide. Puis nous définissons les modes propres de la plaque couplée qui forment une base naturelle du problème. Enfin, nous développerons des méthodes approchées basées sur l'approximation fluide léger.

### 4.1 Ondes libres dans une plaque indéfinie immergée dans un fluide

Soit le plan  $z = 0$  qu'occupe une plaque mince, homogène et isotrope de rigidité  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  et de masse surfacique  $m = \rho_p h$ . Les deux demi-espaces  $z > 0$  et  $z < 0$  sont occupés par un fluide parfait au repos caractérisé par une masse volumique  $\rho_0$  et une vitesse de propagation des ondes acoustiques  $c_0$ . On désigne par  $u(x, y)$  le déplacement de la plaque et par  $p^\pm(x, y, z)$  la pression

acoustique dans les deux demi-espaces. Enfin, on suppose que les mouvements sont harmoniques, de dépendance temporelle (supprimée dans la suite)  $e^{-i\omega t}$ . Le système d'équations à résoudre en l'absence d'excitation extérieure (force mécanique) est le suivant :

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - k_p^4) u(x, y) &= -\frac{1}{D} (p^+(x, y, z = 0) - p^-(x, y, z = 0)) \forall x, y \\ (\Delta + k_f^2) p^\pm(x, y, z) &= 0 \text{ dans } z > 0, z < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(x, y) &= \partial_z p^\pm(x, y, z = 0), \end{aligned}$$

avec  $k_p^4 = \rho_p h \omega^2 / D$  et  $k_f^2 = \omega^2 / c_0^2$ . Notons que la normale est dirigée vers les  $z > 0$ . La troisième équation exprime la continuité des accélérations normales de la plaque et du fluide. À ces équations, il convient d'ajouter une condition de conservation de l'énergie comme la condition de Sommerfeld ou le principe d'absorption limite. Dans ce dernier cas, le nombre d'onde  $k_{p,f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_{p,f}(1 + i\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Notons que si nous avons choisi une dépendance temporelle de la forme  $e^{+i\omega t}$ , le principe d'absorption limite aurait dû être écrit  $k_{p,f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_{p,f}(1 - i\epsilon)$ .

Examinons s'il est possible qu'une onde plane prenne naissance dans la plaque. Pour cela, il suffit d'examiner le cas d'une onde qui se propage dans la direction de l'axe  $x$  :  $u(x, y) = e^{ikx}$ . Par rotation des axes, on accède à toutes les ondes. Mathématiquement, cela revient à chercher la solution générale du problème ci-dessus sous la forme d'une exponentielle complexe (méthode de Laplace)  $\exp(ikx)$ . L'équation de continuité des vitesses vibratoires normales donne

$$\omega^2 \rho_0 e^{ikx} = \partial_z p^+(x, y, z = 0) = \partial_z p^-(x, y, z = 0),$$

comme de plus les pressions acoustiques satisfont une équation de Helmholtz, si  $\partial_z p^\pm(x, y, z = 0) = Ae^{ikx}$  alors, il est nécessaire que nous ayons :

$$p^\pm(x, y, z) = \frac{A}{\pm i\alpha} e^{i(kx \pm \alpha z)} = p^\pm(x, z).$$

Donc, nous devons nécessairement avoir :

$$p^\pm(x, z) = \frac{\omega^2 \rho_0}{\pm i\alpha} e^{i(kx \pm \alpha z)},$$

le signe du coefficient  $\alpha$  est choisi de manière à satisfaire le principe de conservation de l'énergie (+ dans le domaine  $z > 0$ , et - dans  $z < 0$ ). Comme  $p^\pm(x, z)$  vérifient l'équation de Helmholtz, nous avons  $k_f^2 = k^2 + \alpha^2$ , avec  $\alpha > 0$  si  $\alpha^2 > 0$  ou  $\Im\alpha > 0$  si  $\Im\alpha \neq 0$ . À nouveau ce choix est justifié par le principe de conservation de l'énergie et donc par le fait que les ondes qui s'éloignent de la plaque sont amorties quand  $|z|$  croît. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{ikx} \\ p^\pm(x, y, z) &= \frac{\omega^2 \rho_0}{\pm i\alpha} e^{i(kx \pm \alpha z)} \\ k_f^2 &= k^2 + \alpha^2. \end{aligned}$$

L'équation satisfaite par le déplacement de la plaque conduit à la relation algébrique suivante :

$$(k^4 - k_p^4) e^{ikx} = -\frac{\omega^2 \rho_0}{iD\alpha} (e^{ikx} + e^{ikx})$$

d'où, il est facile de tirer :

$$\begin{aligned} iD\alpha (k^4 - k_p^4) &= -2\omega^2 \rho_0 \\ \alpha^2 &= k_f^2 - k^2, \Im\alpha > 0 \text{ si } \Im\alpha \neq 0, \alpha > 0 \text{ si } \Im\alpha = 0 \end{aligned}$$

La relation  $D(k) = i\sqrt{k_f^2 - k^2} (k^4 - k_p^4) + 2\omega^2 \rho_0/D = 0$  est connue sous le nom de relation de dispersion. Ce nom vient de l'équation des plaques qui modélise un milieu dispersif dans lequel la célérité des ondes (la vitesse de phase) dépend de la fréquence. On rappelle que la vitesse de phase est donnée par  $\omega/k$  et que la vitesse de groupe est donnée par  $d\omega/dk$ .

### 4.1.1 Racines de l'équation de dispersion

La relation de dispersion peut aussi s'écrire  $(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 + 4\omega^2 \rho_0^2/D^2 = 0$ . C'est un polynôme de degré 5 en  $k^2$ . Ce polynôme possède 5 racines. Comme il est à coefficients réels, il peut posséder 5 racines réelles ou 3 racines réelles et 1 paire de racines complexes conjuguées ou 1 racine réelle et 2 paires de racines complexes conjuguées. Bien évidemment, si  $k$  est racine,  $-k$  l'est aussi. Nous devons distinguer deux cas  $k_f > k_p$  et  $k_f < k_p$ . Lorsque  $k_f = k_p$ , les longueurs d'ondes mécaniques et acoustique sont identiques ainsi que les vitesses de propagation des ondes. Rappelons que la célérité de propagation des ondes de flexion dans la plaque est dispersive (elle croît avec la fréquence). La pulsation pour laquelle  $k_f = k_p$  est nommée pulsation critique (ou pulsation de coïncidence). Elle est notée  $\omega_c$ . De  $k_f = k_p$ , on tire aisément  $\omega_c = c_0^2 \sqrt{\rho_p h/D}$ . Pour une plaque en acier de 1 cm d'épaisseur dans l'air la valeur de la fréquence critique est de 1200 Hz, pour le plomb 5500 Hz, pour l'acier, l'aluminium ou le verre 1200 Hz, pour le cuivre 1800 Hz, pour le béton 2000 Hz et pour le plâtre ou le plexiglas 4000 Hz.

À basse fréquence, pour  $\omega < \omega_c$ , nous avons  $k_f < k_p$ , les vitesses de phases, données par  $c_{f,p} = \omega/k_{f,p}$  sont alors telles que  $c_0 > c_p$  : les ondes de flexion dans la plaque se propagent à une vitesse inférieure à la vitesse de propagation du son, on parle de régime subsonique. À l'inverse, en haute fréquence  $\omega > \omega_c$ , nous avons  $k_f > k_p$  et les vitesses de phase sont telles que  $c_0 < c_p$  et on est en régime supersonique. On trouve parfois dans la littérature le rapport  $M = c_p/c_0 = k_f/k_p = \sqrt{\omega/\omega_c}$  qui est le nombre de Mach des vitesses de phase. On peut prouver graphiquement qu'il existe au moins un racine réelle  $k_0 > k_{f,p}$ . Pour ce faire, cherchons s'il existe un ou plusieurs points d'intersection des courbes  $(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2$  et  $4\omega^2 \rho_0^2/D^2$ , dans les cas subsonique et supersonique :

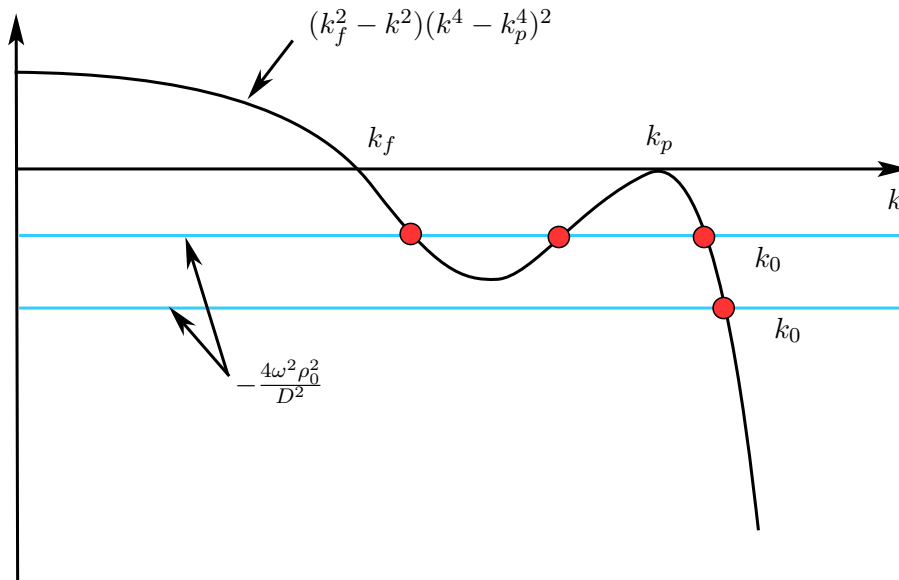


FIGURE 4.1 – Résolution graphique de la relation de dispersion  $k_f < k_p$  (régime subsonique).

D'après la figure 4.1, il est évident qu'il existe toujours une solution réelle  $k_0 > k_p > k_f$ . Dans ce cas encore, nous voyons d'après la figure 4.2 qu'une solution réelle  $k_0 > k_f > k_p$  existe toujours.

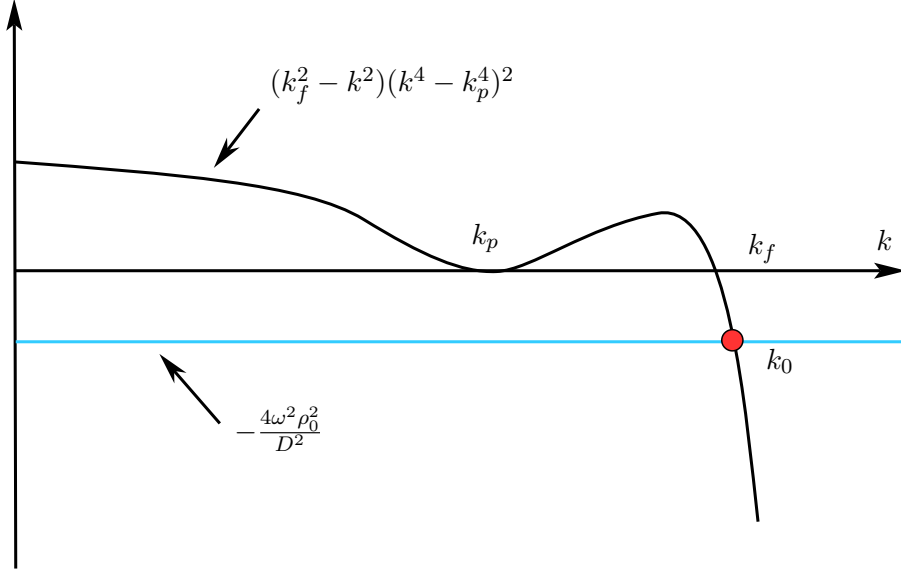


FIGURE 4.2 – Résolution graphique de la relation de dispersion  $k_f > k_p$  (régime supersonique).

On montre de même que la relation de dispersion possède un ou deux autres paires de racines complexes conjuguées de la forme :

$$k_+ = \kappa + i\tau \text{ et } k_- = -\kappa + i\tau,$$

de même partie imaginaire  $\tau > 0$  et de parties réelles égales et opposées  $\kappa > 0$ .

La racine réelle  $k_0$  correspond à une onde plane subsonique qui se propage dans la plaque sans amortissement vers les  $x > 0$  :

$$u_0 = e^{ik_0x}, \text{ propagation vers les } x > 0$$

À la racine réelle  $k_0$  de l'équation de dispersion, correspond la pression acoustique :

$$p_0^+ = \frac{\omega^2 \rho_0}{i\alpha} e^{i(k_0x + \alpha z)}$$

or dans tous les cas  $k_0 > k_f$  donc  $\alpha^2 = k_f^2 - k_0^2 < 0$  et donc  $\alpha = i\sqrt{k_0^2 - k_f^2}$ . Le champ de pression rayonné par l'onde  $k_0$  est une onde plane évanescente. Elle décroît exponentiellement avec  $z$  et ne transporte aucune énergie dans le fluide. Ce résultat est *a priori* évident puisque dans le système plaque-fluide, cette onde de flexion se conserve et que, par conséquent, la plaque ne peut rayonner aucune énergie.

#### 4.1.2 Approximation fluide léger

On pose  $\epsilon = \rho_0/(\rho_p h)$ . La relation de dispersion s'écrit alors  $(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8 \epsilon^2 = 0$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, l'équation de dispersion se réduit à

$$(k_f^2 - k^2)(k^4 - k_p^4)^2 = 0$$

dont les racines sont évidemment  $k = \pm k_p$ ,  $k = \pm i k_p$  et  $k = \pm k_f$ . Lorsque l'influence du fluide sur la plaque est faible, il est raisonnable de supposer que racines de l'équation de dispersion de la plaque couplée sont proches de celles qu'elle a dans le vide. On cherche donc les racines sous la forme

$$\begin{aligned} k_1 &= k_p(1 + \epsilon\gamma_1) \\ k_2 &= i k_p(1 + \epsilon\gamma_2) \\ k_3 &= k_f(1 + \epsilon^2\gamma_3) \end{aligned}$$

Dont les inconnues sont  $\gamma_i$ . Partons de  $k_1 = k_p(1 + \epsilon\gamma_1)$  que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$\begin{aligned} (k_f^2 - (k_p(1 + \epsilon\gamma_1))^2)((k_p(1 + \epsilon\gamma_1))^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0 \\ (k_f^2 - k_p^2(1 + 2\epsilon\gamma_1))(k_p^4(1 + 4\epsilon\gamma_1) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k_f$  et  $k_p$  sont suffisamment différents, nous pouvons écrire  $k_f^2 - k_p^2(1 + 2\epsilon\gamma_1) = k_f^2 - k_p^2$ . La relation de dispersion devient alors  $(k_f^2 - k_p^2)(4\epsilon\gamma_1 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$  soit encore  $(k_f^2 - k_p^2)4\gamma_1^2 = -1$ . D'où on déduit facilement

$$\gamma_1 = \pm \frac{1}{2i\sqrt{k_f^2 - k_p^2}}.$$

De même, on part de  $k_2 = ik_p(1 + \epsilon\gamma_2)$ , que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$(k_f^2 + k_p^2(1 + 2\epsilon\gamma_2))(k_p^4(1 + 4\epsilon\gamma_2) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0.$$

La relation de dispersion devient alors  $(k_f^2 + k_p^2)(4\epsilon\gamma_2 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$ . D'où on déduit facilement

$$\gamma_2 = \pm \frac{1}{2i\sqrt{k_f^2 + k_p^2}}.$$

Enfin, on part de  $k_3 = ik_p(1 + \epsilon^2\gamma_3)$ , que l'on reporte dans la relation de dispersion. On obtient

$$\begin{aligned} (-2\epsilon^2\gamma_3 k_f^2)(k_f^4(1 + 4\epsilon^2\gamma_3) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0 \\ (-2\epsilon^2\gamma_3 k_f^2)(k_f^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0, \end{aligned}$$

si  $k_f$  et  $k_p$  sont suffisamment différents. De lé, on tire

$$\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}.$$

Notons que tous ces résultats sont valables "loin" de la fréquence de coïncidence. Examinons maintenant les cas subsonique et supersonique.

### Régime subsonique

Sous la fréquence de coïncidence, on a  $k_p > k_f$ . Soit  $\sqrt{k_f^2 - k_p^2} = i\sqrt{k_p^2 - k_f^2}$ . Donc  $\gamma_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}}$ ,  $\gamma_2 = \pm \frac{i}{2\sqrt{k_p^2 + k_f^2}}$  et  $\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}$ . On obtient les racines

$$\begin{aligned} k_1^+ &= k_p \left( 1 + \frac{\epsilon}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}} \right) \\ k_1^- &= k_p \left( 1 - \frac{\epsilon}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}} \right) \\ k_2^+ &= ik_p \left( 1 + \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}} \right) \\ k_2^- &= ik_p \left( 1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}} \right) \\ k_3 &= k_f \left( 1 + \frac{2\epsilon^2 k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2} \right) \end{aligned}$$

À ces racines, se rajoutent celles de signe opposé. On voit bien que l'on obtient une paire de racines complexes conjuguées et trois racines réelles ; ceci correspond bien au résultat présenté figure (4.1) où on observe une racine légèrement supérieure à  $k_f$  (ici nommée  $k_3$ ) et deux racines de part et d'autre de  $k_p$  (ici nommées  $k_1^\pm$ ).

### Régime supersonique

Au-dessus de la fréquence de coïncidence, on a  $k_f > k_p$ . Donc  $\gamma_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{k_p^2 - k_f^2}}$ ,  $\gamma_2 = \pm \frac{i}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}}$  et  $\gamma_3 = \frac{2k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2}$ . On obtient les racines

$$\begin{aligned} k_1^+ &= k_p \left( 1 + \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 - k_p^2}} \right) \\ k_1^- &= k_p \left( 1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 - k_p^2}} \right) \\ k_2^+ &= ik_p \left( 1 + \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}} \right) \\ k_2^- &= ik_p \left( 1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{k_f^2 + k_p^2}} \right) \\ k_3 &= k_f \left( 1 + \frac{2\epsilon^2 k_p^8}{k_f^2(k_f^4 - k_p^4)^2} \right) \end{aligned}$$

À ces racines, se rajoutent celles de signe opposé. On voit que l'on obtient une racine réelle supérieure à  $k_f$  et  $k_p$ , et deux paires de racines complexes conjuguées.

**EXERCICE.** étude du régime sonique. Montrer que les racines  $k_2$  ne changent pas et que les racines  $k_1$  et  $k_3$  sont confondues. On posera  $k_1 = k_p(1 + \epsilon^{2/3}\gamma_1)$  et  $k_3 = k_f(1 + \epsilon^{2/3}\gamma_3)$ .

**SOLUTION.** En régime sonique,  $k_f = k_p$ . On voit facilement d'après les résultats précédents que les racines  $k_2^\pm$  sont identiques en régime subsonique et supersonique. Par contre, les racines  $k_1$  et  $k_3$ , identiques en régime sonique, ne sont pas définies dans ce cas.

Partons de  $k_1 = k_3 = k_p(1 + \epsilon^{2/3}\gamma_1)$  que l'on reporte dans la relation de dispersion

$$\begin{aligned} (k_f^2 - (k_p(1 + \epsilon^{2/3}\gamma_1))^2)((k_p(1 + \epsilon^{2/3}\gamma_1))^4 - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0 \\ (k_f^2 - k_p^2(1 + 2\epsilon^{2/3}\gamma_1))(k_p^4(1 + 4\epsilon^{2/3}\gamma_1) - k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $k_f = k_p$ , on obtient  $-2k_p^2\epsilon^{2/3}\gamma_1(4\epsilon^{2/3}\gamma_1 k_p^4)^2 + 4k_p^8\epsilon^2 = 0$ . Soit encore  $8k_p^2\epsilon^{6/3}\gamma_1^3 = \epsilon^2$ . Soit finalement  $\gamma_1 = \gamma_3 = 1/(2k_p^{2/3})$ . On obtient une seule racine réelle.

## 4.2 transmission d'une onde plane par une plaque mince

Nous considérons ici le problème bidimensionnel d'une plaque d'extension infinie qui sépare deux domaines semi-infinis occupés par le même fluide parfait :



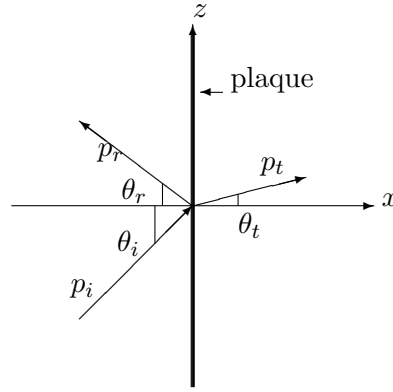


FIGURE 4.3 – Géométrie du problème

La plaque est insonifiée par une onde plane dont l'angle d'incidence par rapport à la normale est donné par  $\theta_i$ . Dans  $x < 0$ , la pression est composée de deux termes  $p_i$  et  $p_r$ . Dans  $x > 0$ , seule une pression transmise  $p_t$  existe. En outre,  $u(y, z) = u(z)$ ,  $p^+(x, y, z) = p^+(x, z)$  et  $p^-(x, y, z) = p^-(x, z)$ . Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dz^4} - k_p^4 \right) u(z) &= -\frac{1}{D} (p^+(0, z) - p^-(0, z)) \\ (\Delta + k_f^2) p^\pm(x, z) &= 0 \text{ dans } x > 0, x < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(z) &= \partial_x p^\pm, \forall z. \end{aligned}$$

Pour simplifier encore le problème, nous pouvons supposer que la pression incidente est unitaire. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_i(x, z) &= e^{ik_f(z \sin \theta_i + x \cos \theta_i)} \\ p_r(x, z) &= R e^{ik_f(z \sin \theta_r - x \cos \theta_r)} \\ p_t(x, z) &= T e^{ik_f(z \sin \theta_t + x \cos \theta_t)}. \end{aligned}$$

La condition de continuité des vitesses normales donne :

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_0 u(z) &= ik_f \cos \theta_i e^{ik_f z \sin \theta_i} - R ik_f \cos \theta_r e^{ik_f z \sin \theta_r} \\ &= T ik_f \cos \theta_t e^{ik_f z \sin \theta_t}. \end{aligned}$$

Comme ces relations sont vraies pour tout  $x$ , il est nécessaire que  $ik_f \sin \theta_i = ik_f \sin \theta_r = ik_f \sin \theta_t$ , soit  $\theta_i = \theta_r = \theta_t = \theta$ . La deuxième équation de continuité nous donne :

$$u(z) = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} T ik_f \cos \theta e^{ik_f z \sin \theta},$$

si nous reportons cette expression du déplacement dans l'équation que celui-ci satisfait, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dz^4} - k_p^4 \right) u(z) &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} T ik_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) e^{ik_f z \sin \theta} \\ &= -\frac{1}{D} (p^+(0, z) - p^-(0, z)) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{\omega^2 \rho_0} T ik_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) e^{ik_f z \sin \theta} = -\frac{1}{D} (T e^{ik_f z \sin \theta} - (1 + R) e^{ik_f z \sin \theta})$$

soit en simplifiant par  $e^{ik_f z \sin \theta}$  :

$$\frac{1}{\omega^2 \rho_0} T i k_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) = -\frac{1}{D} (T - (1 + R)).$$

À cette équation se rajoute celle issue de la condition de continuité des vitesses normales  $T = 1 - R$ . De ces deux équations, nous obtenons facilement les coefficients de réflexion et de transmission :

$$(1 - R) \frac{i k_f \cos \theta}{\omega^2 \rho_0} (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) = \frac{2R}{D}$$

soit

$$\begin{aligned} R &= \frac{i k_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4)}{i k_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) + \frac{2\omega^2 \rho_0}{D}} \\ &= \frac{i k_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4)}{\mathcal{D}(k_f \sin \theta)} \\ T &= 1 - R = \frac{\frac{2\omega^2 \rho_0}{D}}{i k_f \cos \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4) + \frac{2\omega^2 \rho_0}{D}} \\ &= \frac{\frac{2\omega^2 \rho_0}{D}}{\mathcal{D}(k_f \sin \theta)}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}(k)$  est l'équation de dispersion des plaques couplées. Comme  $k_f \sin \theta < k_f$ , il n'existe pas de racines réelle puisqu'elles sont toutes plus grandes que  $k_f$  (voir figures (4.1) et (4.2)) alors  $\mathcal{D}(k_f \sin \theta) \neq 0$ . Si  $k_f \sin \theta = k_p$  il est aisé de voir que  $R = 0$  et  $T = 1$  : il y a coïncidence et la plaque est totalement transparente. Plaçons-nous maintenant sous incidence normale  $\theta = 0$ . Nous avons alors :

$$R = \frac{i k_f k_p^4}{i k_f k_p^4 - \frac{2\omega^2 \rho_0}{D}}, T = \frac{\frac{2\omega^2 \rho_0}{D}}{\frac{2\omega^2 \rho_0}{D} - i k_f k_p^4}$$

or  $k_p^4 = \rho_p h \omega^2 / D$ , alors

$$R = \frac{i k_f \rho_p h}{i k_f \rho_p h - 2\rho_0}, T = \frac{2\rho_0}{2\rho_0 - i k_f \rho_p h}.$$

Rappelons la définition de  $\tau$  qui est le rapport entre les puissances moyennes (sur une période) des énergies transmise et incidente (ici unitaire). On montre que  $e_T \propto TT^*$ ,  $e_I = 1$ . On montre que :

$$\tau = \frac{4\omega^4 \rho_0^2}{4\omega^4 \rho_0^2 + D^2 k_f^2 \cos^2 \theta (k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4)^2}.$$

Nous obtenons sous incidence normale  $\tau = TT^* = 4\rho_0^2 c_0^2 / (4\rho_0^2 c_0^2 + \omega^2 (\rho_p h)^2)$ . Définissons  $i$  comme l'indice d'affaiblissement acoustique. Nous avons  $i = -10 \log_{10} \tau$ . Comme  $1/\tau$  est proportionnel au carré de la fréquence, il est aisé de vérifier que  $i$  présente une pente de 6 dB par octave (ce qui correspond à la classique loi de masse).

L'indice d'affaiblissement acoustique présente trois zones différentes. En dessous de la fréquence de coïncidence<sup>1</sup>, l'indice présente une pente de 6 dB par octaves qui correspond à la loi de masse ; à la fréquence de coïncidence, la plaque est transparente, au-delà, nous avons une pente, typique

1. Rappelons que la fréquence de coïncidence dépend de l'angle d'incidence : elle est minimale pour l'incidence rasante et rejetée à l'infini pour l'incidence normale.

d'une atténuation par raideur, de 18 dB par octave. Nous présentons figure 4.4 des courbes d'indice d'affaiblissement pour une plaque en acier dans l'air. Les caractéristiques mécanique et géométriques sont, pour la plaque  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho_p = 8000$  Kg/m<sup>3</sup>,  $h = 1$  cm et pour l'air :  $\rho_0 = 1,3$  Kg/m<sup>3</sup>,  $c = 340$  m/s. La fréquence de coïncidence de cette plaque couplée à l'air est  $\omega_c = 7640$  rd/s soit  $f_c = 1216$  Hz. Il est à noter que sous incidence rasante (pour  $\theta = \pi/2$ ) l'indice d'affaiblissement est toujours nul sous la fréquence critique.

Remarquons qu'en pratique le champ incident est très souvent diffus, c'est-à-dire que les ondes qui insonifient la paroi ont des directions équiprobables. Dans ce cas, la transparence doit se calculer en intégrant sur toutes les directions en limitant toutefois la prise en compte des incidences rasantes ; une valeur souvent conseillée dans la littérature est d'intégrer pour  $0 \leq \theta \leq 78^\circ$ . La transparence acoustique en champ diffus est donnée par  $\tau_d = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\phi, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi / \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$ . Nous présentons figure 4.4 des courbes d'indice d'affaiblissement en onde plane pour divers angles d'incidence ( $i(0, \omega)$ ,  $i(\pi/4, \omega)$ ,  $i(\pi/2, \omega)$ ) et en champ diffus ( $i_d(\omega)$ ) pour une plaque en acier dans l'air. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont, pour la plaque  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho_p = 8000$  Kg/m<sup>3</sup>,  $h = 1$  cm et pour l'air :  $\rho_0 = 1,3$  Kg/m<sup>3</sup>,  $c_0 = 340$  m/s. La fréquence de coïncidence de cette plaque couplée à l'air est  $\omega_c = 7640$  rd/s soit  $f_c = 1216$  Hz.

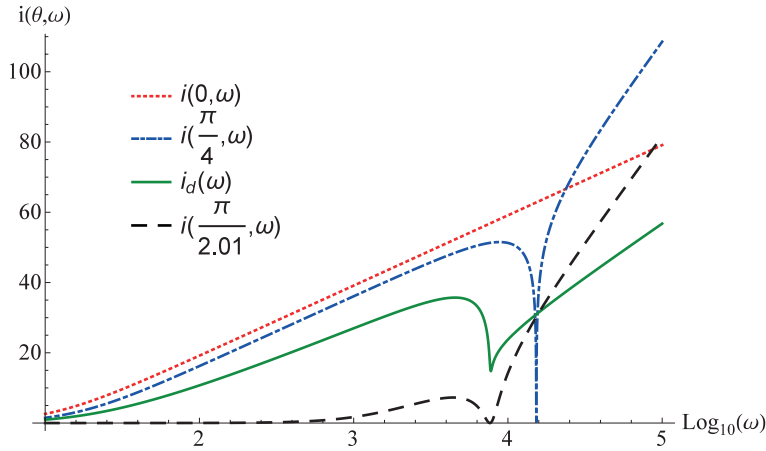


FIGURE 4.4 – Indice d'affaiblissement d'une plaque en acier dans l'air

Pour éviter ce phénomène de transparence au voisinage de la fréquence de coïncidence, on a intérêt à avoir une fréquence critique la plus haute possible<sup>2</sup>. On devrait donc chercher à utiliser les parois les plus lourdes et les moins rigides possible (comme le plomb). Ce qui va à l'encontre de l'évolution technique où les parois doivent participer à la tenue de l'ensemble et doivent être plutôt légères et rigides (comme les composites fibres de carbone époxy).

### 4.3 Rayonnement d'une plaque indéfinie sous excitation ponctuelle

Nous envisageons maintenant une excitation mécanique de la plaque par une force ponctuelle (modélisée par une distribution de Dirac)  $\delta(x, y)$  placée à l'origine. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} (\Delta^2 - k_p^4) u(x, y) &= \frac{\delta(x, y)}{D} - \frac{1}{D} (p^+(x, y, z = 0) - p^-(x, y, z = 0)) \text{ sur } z = 0 \\ (\Delta + k_f^2) p^\pm(x, y, z) &= 0 \text{ dans } z > 0, z < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(x, y) &= \partial_z p^\pm(x, y, z = 0). \end{aligned}$$

2. Rappelons que  $\omega_c$  décroît avec la rigidité  $E$  et l'épaisseur  $h$  et croît avec la masse  $\rho_p$ .

Pour assurer l'unicité de la solution, il est commode d'utiliser le principe d'absorption limite. On cherche le couple  $(p, u)$  comme limite pour  $\epsilon \rightarrow 0$  de la solution bornée  $(p_\epsilon, u_\epsilon)$  du système précédent définie en remplaçant  $k_{f,p}$  par  $k_{f,p} + i\epsilon, \epsilon > 0$ .

### 4.3.1 Équation intégral-différentielle en $u$

Soit  $G_f(M, M')$ , le noyau de Green de l'équation de Helmholtz dans le demi espace  $z > 0$  qui satisfait une condition Neumann sur le plan  $z = 0$ . Ce noyau se calcule simplement par la méthode des images, et on a :

$$G_f(M, M') = -\frac{e^{ik_f r(M, M')}}{4\pi r(M, M')} - \frac{e^{ik_f r(M, M'')}}{4\pi r(M, M'')},$$

où  $M''$  est le symétrique de  $M'$  par rapport au plan  $z = 0$ . Par représentation de Green, la pression acoustique dans le demi espace  $z > 0$  est donnée par :

$$p^+(M) = -\int_{z=0} p^+(Q) \partial_n G_f(M, Q) - \partial_n p^+(Q) G_f(M, Q) dQ,$$

comme par hypothèse si  $Q \in [z = 0]$  :  $\partial_n G_f(M, Q) = 0$  et  $\partial_n p^+(Q) = \omega^2 \rho_0 u(Q)$ , nous avons alors très simplement :

$$p^+(x, y, z) = -2\omega^2 \rho_0 \int_{z=0} u(x', y') \frac{e^{ik_f \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} dx' dy'.$$

De même pour  $p^-$ , on montre simplement que

$$p^-(x, y, z) = +2\omega^2 \rho_0 \int_{z=0} u(x', y') \frac{e^{ik_f \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} dx' dy',$$

expression qui diffère de la précédente par le signe placé devant l'intégrale (changement de sens de la normale). L'équation vérifiée par  $u(x, y)$  est alors :

$$(\Delta^2 - k_p^4) u(x, y) - \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{z=0} u(x', y') \frac{e^{ik_f \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' = \frac{\delta(x, y)}{D},$$

dans cette équation intégral-différentielle, la seule inconnue est le déplacement de la plaque.

### 4.3.2 Transformée de Fourier de $u$

Remarquons que l'opérateur intégral-différentiel ainsi que le second membre de l'équation précédente possèdent une symétrie de révolution par rapport à l'origine. Donc  $u(x, y) = u(r)$  ne dépend que de la distance à l'origine  $r$ . Nous savons que les transformées de Fourier directes et inverses d'une fonction radiale sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(r)) = \hat{u}(\rho) &= 2\pi \int_0^\infty u(r) J_0(2\pi\rho r) r dr \\ (\mathcal{F}^{-1} \hat{u}(\rho)) = u(r) &= \pi \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(\rho) H_0^1(2\pi\rho r) \rho d\rho \end{aligned}$$

La transformée de Fourier du bi-Laplacien est donnée par  $16\pi^4 \rho^4$ . Le calcul de la transformée de Fourier de l'intégrale est plus délicat. Remarquons tout d'abord que nous pouvons écrire :

$$-\int_{z=0} u(x', y') \frac{e^{ik_f \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{-e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)} \star u(x, y) \right) \otimes \delta_z \right\}$$

où  $f(x, y) \otimes g(z)$  est le produit tensoriel entre  $f(x, y)$  et  $g(z)$  et  $\star$  est le produit de convolution par rapport aux variables spatiales  $x$  et  $y$ . Nous savons que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit simple de la transformée de Fourier de chacun des termes. Pour calculer la transformée de Fourier du noyau de convolution, remarquons que nous avons par définition :

$$(\Delta + k_f^2) \frac{-e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)} = \delta_x \otimes \delta_y \otimes \delta_z,$$

Par transformée de Fourier par rapport aux variables  $x$  et  $y$  (qui est la transformée de Fourier radiale définie ci-dessus), nous obtenons :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k_f^2 - 4\pi^2 \rho^2 \right) \left( \frac{-e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)} \right) (\rho, z) = \delta_z,$$

où  $\left( \frac{-e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)} \right) (\rho, z)$  est la transformée de Fourier radiale de  $\frac{-e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)}$ . Si nous posons  $k_f^2 - 4\pi^2 \rho^2 = K^2(\rho)$  avec  $\Im K(\rho) > 0$ , nous voyons que la fonction cherchée est le noyau de Green d'une équation de Helmholtz monodimensionnelle dont le nombre d'onde est  $K(\rho)$ . Nous obtenons alors simplement :

$$\left( \frac{-e^{ik_f r}}{4\pi r} \right) (\rho, z) = \frac{e^{iK(\rho)|z|}}{2iK(\rho)},$$

d'où par passage à la limite en  $z = 0$  :

$$\mathcal{F} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{e^{ik_f r(x, y, z)}}{4\pi r(x, y, z)} \right) \star u \otimes \delta_z \right\} \right\} = u(\hat{\rho}) \frac{1}{2iK(\rho)}.$$

La transformée de Fourier de l'équation vérifiée par le déplacement de la plaque couplée est donnée par :

$$u(\hat{\rho}) = \frac{1}{D} \frac{iK(\rho)D}{(16\pi^4 \rho^4 - k_p^4) iK(\rho)D + 2\omega^2 \rho_0}, K^2(\rho) = k_f^2 - 4\pi^2 \rho^2, \Im K(\rho) > 0$$

### 4.3.3 Calcul de $u(r)$

La formule d'inversion précédente conduit é :

$$u(r) = \pi \frac{1}{D} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{iK(\rho)D}{(16\pi^4 \rho^4 - k_p^4) iK(\rho)D + 2\omega^2 \rho_0} H_0^1(2\pi \rho r) \rho d\rho.$$

Calculons cette intégrale par la méthode des résidus sur le contour suivant :

Par le lemme de Jordan, on montre que pour  $R \rightarrow \infty$ , l'intégrale sur le demi-cercle tend vers zéro. Celle sur le segment réel  $]Re^{i\pi}, R[$  tend vers l'intégrale cherchée. Toutefois, la fonction  $K(\rho)$  est multiforme, il faut contourner le point  $2\pi\rho = k_f$ . La manière de contourner ce point a été correctement définie en utilisant le principe d'absorption limite qui impose à  $K(\rho)$  d'avoir une partie imaginaire non nulle positive. Le déplacement s'exprime ainsi comme la somme des résidus contenus dans le contour augmenté d'une intégrale de branche. Nous n'exposerons pas ici le calcul de cette intégrale de branche ; ce qu'il faut néanmoins retenir c'est que pour  $R \gg 1$ , elle décroît exponentiellement. Le déplacement est donc correctement décrit par :

$$u(r) = 2i\pi^2 \frac{1}{D} \sum_{n=1}^3 A_n H_0^1(k_n r)$$

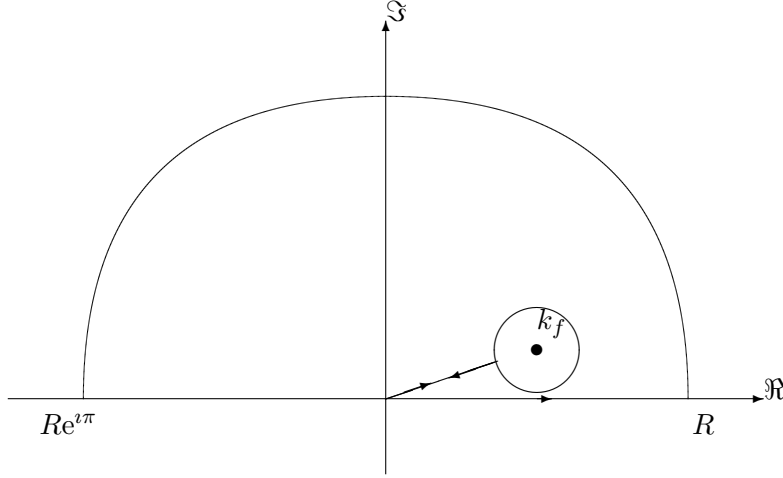


FIGURE 4.5 – Contour d'intégration

où les  $k_n$  sont les racines de l'équation de dispersion. Les coefficients  $A_n$  sont donnés par :

$$A_n = \frac{\imath K_n D \frac{k_n}{2\pi}}{\mathcal{D}'\left(\frac{k_n}{2\pi}\right)},$$

où  $K_n = k_f^2 - k_n^2$ ,  $\Im K_n > 0$  si  $K_n \in \mathbb{C}$  ou  $K_n > 0$  si  $K_n \in \mathbb{R}$ .  $\mathcal{D}'(\rho)$  est la dérivée par rapport à  $\rho$  du numérateur donnée par :

$$\mathcal{D}'(\rho) = \imath K'(\rho) D(16\pi^4 \rho^4 - k_p^4) + \imath K(\rho) D 64\pi^4 \rho^3.$$

Signalons que  $u(r)$  a, au voisinage de l'origine, un comportement analogue à celui d'une plaque dans le vide :

$$\begin{aligned} u(0) &= C \\ u'(0) &= 0 \\ u''(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \ln \epsilon \\ u'''(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C}{\epsilon}. \end{aligned}$$

#### 4.3.4 Pression acoustique rayonnée

Sans difficultés, on peut calculer les transformées de Fourier de  $p^\pm(x, y, z)$ . Le calcul des transformées inverses, qui fait appel aux mêmes techniques de calcul fait apparaître les mêmes difficultés. Nous ne les développerons donc pas ici. Par contre, il est facile de calculer le comportement asymptotique -é grande distance- de la pression rayonnée par la plaque. Pour cela, établissons un résultat général sur le comportement asymptotique du rayonnement d'une source quelconque de densité  $f(M)$ . Nous avons :

$$\tilde{p}(M) = \int_{\mathbb{R}^3} f(M') \frac{e^{\imath k_f r(M, M')}}{4\pi r(M, M')} dM'.$$

Définissons par  $(r, \theta, \phi)$  les coordonnées sphériques de  $M$  et par  $(r', \theta', \phi')$  celles de  $M'$ . On rappelle que pour  $k_f r \gg 1$ , le noyau de l'intégrale s'écrit :

$$-\frac{e^{\imath k_f r(M, M')}}{4\pi r(M, M')} = -\frac{e^{\imath k_f r}}{4\pi r} e^{-\imath k_f r' (\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta')} + \mathcal{O}(k_f r)^{-2}$$

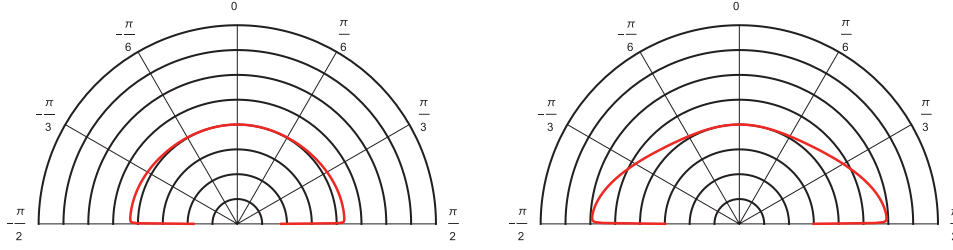


FIGURE 4.6 – Directivité d'une plaque infinie. Gauche : 500Hz. Droite : 1000 Hz

ce qui signifie que le noyau de l'équation ci-dessus peut être remplacé par le second membre de la relation précédente avec une erreur qui décroît comme le carré de  $k_f r$ . Nous obtenons ainsi :

$$\tilde{p}(M) \approx -\frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} f(M') e^{-ik_f r' (\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta')} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'.$$

Revenons aux coordonnées cartésiennes :

$$\tilde{p}(M) \approx \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} f(M') e^{-ik_f (x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta)} dx' dy' dz'.$$

Nous reconnaissons la transformée de Fourier de  $f(x', y', z')$  prise aux points :

$$2\pi\xi_1 = k_f \sin \theta \cos \phi, 2\pi\xi_2 = k_f \sin \theta \sin \phi, 2\pi\xi_3 = k_f \cos \theta$$

d'où le résultat final :

$$\tilde{p}(M) \approx \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \hat{f} \left( \frac{k_f \sin \theta \cos \phi}{2\pi}, \frac{k_f \sin \theta \sin \phi}{2\pi}, \frac{k_f \cos \theta}{2\pi} \right),$$

où

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) e^{-2i\pi(x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3)} dx dy dz.$$

Avec ce résultat, il est facile de calculer le comportement asymptotique de  $p^+(x, y, z)$ . Comme nous l'avons remarqué précédemment,  $p^+(x, y, z)$  est le rayonnement d'une source de densité  $f(x, y, z) = -2\omega^2 \rho_0 u(x, y) \otimes \delta_z$  dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$\mathcal{F}(u(x, y) \otimes \delta_z) = (\hat{u}(\rho))_{\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}},$$

avec  $2\pi\xi_1 = k_f \sin \theta \cos \phi$  et  $2\pi\xi_2 = k_f \sin \theta \sin \phi$  il est facile de voir que  $\rho = k_f \sin \theta / 2\pi$ . D'où

$$p^+(M) \approx -2\omega^2 \rho_0 \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \hat{u} \left( \frac{k_f \sin \theta}{2\pi} \right).$$

Nous obtenons un résultat similaire pour  $p^-(x, y, z)$ . Le calcul du diagramme de directivité (ou fonction de forme) ne demande pas d'inversion de Fourier et se calcule ainsi sans aucune difficulté. On a

$$p^+(M) \approx -2\omega^2 \rho_0 \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \frac{ik_f \cos \theta}{\left(k_f^4 \sin^4 \theta - k_p^4\right) i D k_f \cos \theta + 2\omega^2 \rho_0}$$

Cette fonction présente un maximum marqué lorsque le dénominateur est minimum, c'est à dire pour  $k_f^4 \sin^4 \theta_M = k_p^4$ . Ce qui correspond à un angle  $\theta_M = \arcsin k_p / k_f = \arcsin 1/M$ . Nous obtenons ainsi en régime supersonique un angle (nommé angle de Mach) pour lequel la plaque présente un maximum de directivité. Nous présentons dans les figures 4.6 et 4.7 quatre exemples de directivité. Deux en

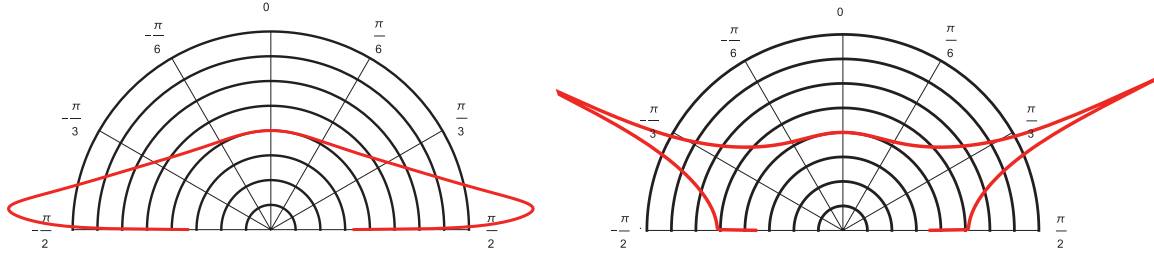


FIGURE 4.7 – Directivité d'une plaque infinie. Gauche : 1216Hz ( $\theta_M = 89,7^\circ = \pi/2,01$  rad). Droite 1500Hz ( $\theta_M = 64,2^\circ = \pi/2,8$  rad)

régime subsonique à 500 Hz courbe de gauche et 1000 Hz courbe de droite où le rayonnement de la plaque reste globalement monopolaire. La directivité en régime sonique à 1216 Hz, présentée courbe de gauche figure 4.7, montre une directivité de plaque qui est maximale en incidence rasante. La dernière, présentée courbe de droite figure 4.7, en régime sonique, à 2000 Hz montre deux angles de directivité très marqués à environ  $\pm 64^\circ$  qui correspondent à l'angle de Mach  $\theta_M$ .

## 4.4 Vibration et rayonnement acoustique de plaques finies

### 4.4.1 Énoncé du problème

Nous considérons dans tout ce qui suit une plaque mono dimensionnelle qui est en contact sur ses deux faces avec un même fluide parfait. La plaque, de longueur finie  $2L$ , est appuyée à ses extrémités. Elle est prolongée par un écran infini rigide qui sépare les deux milieux fluides (voir figure 4.8).

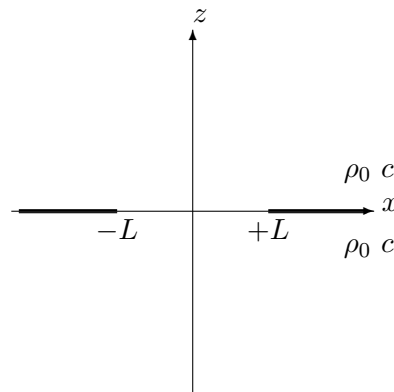


FIGURE 4.8 – Géométrie du problème

Les équations du problème sont les suivantes

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_p^4 \right) u(x) &= \frac{f(x)}{D} - \frac{1}{D} (p^+(x, 0) - p^-(x, 0)) \\ (\Delta + k_f^2) p^\pm(x, z) &= 0 \text{ dans } z > 0, z < 0 \\ \omega^2 \rho_0 u(x) &= \partial_z p^\pm, \forall x \\ u(\pm L) = u''(\pm L) &= 0. \end{aligned}$$

Par utilisation du noyau de Green de l'équation de Helmholtz pour le problème de Neumann sur la surface  $z = 0$  qu'occupent la plaque et le baffle, la représentation de Green de la pression acoustique



nous permet décrire celle-ci sous la forme suivante :

$$p^\pm(x, z) = \operatorname{sgn}z \, 2\omega^2 \rho_0 \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \mathrm{H}_0 \left( k_f \sqrt{(x-x')^2 + z^2} \right) u(x') dx'.$$

Le système initial d'équations différentielles se transforme ainsi en un système intégro-différentiel couplé :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_p^4 \right) u(x) &= \frac{f(x)}{D} - P(x) \\ P(x) &= \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \mathrm{H}_0(k_f |x-x'|) u(x') dx' \\ u(\pm L) = u''(\pm L) &= 0. \end{aligned}$$

De nombreuses méthodes existent pour résoudre ce problème. Nous allons en étudier quelques-unes. Néanmoins, toutes font appel au calcul numérique.

#### 4.4.2 Méthodes “exactes”

Il n'existe pas de méthode exacte. Tout ce que l'on peut espérer est une approximation aussi précise que possible de la solution des équations du problème. Certaines méthodes permettent de construire des approximations de ce genre comme les développements en séries de polynômes orthogonaux (qui donnent en principe accès à une précision infinie...). Il est important de bien comprendre que chercher à obtenir plus de deux ou trois chiffres significatifs est numériquement plus que difficile. En outre, on n'a que rarement accès aux grandeurs mécaniques et physique des matériaux avec une précision inférieure à quelques pour cents ;<sup>3</sup> en pratique, on connaît rarement le spectre d'une structure avec une précision supérieure à quelques pour cents.

#### Solution par équations intégrales

Considérons  $G_p$  le noyau de Green de l'équation des plaques mono dimensionnelles, donné par :

$$G_p(x; x') = G_p(x - x') = \frac{1}{4k_p^3 D} \left( \imath e^{k_p |x-x'|} - e^{-k_p |x-x'|} \right).$$

Par représentation de Green, on montre que  $u(x)$  est solution de l'équation

$$u(x) = u_0(x) + S_1(x-L) + S_2(x-L) + S_1(x+L) + S_2(x+L) + \int_{-L}^{+L} P(x') G_p(x-x') dx',$$

où  $u_0(x) = 1/D f(x) \star G_p(x)$ . Les fonctions  $S_{1,2}$  sont des sources situées sur les frontières de la plaque, en  $\pm L$ . Elles permettent de prendre en compte la discontinuité du déplacement au bord de celle-ci. Nous avons

$$S_1(x \pm L) = \alpha_1^{\pm L} G_p(x - \pm L), S_2(x \pm L) = \alpha_2^{\pm L} G_p''(x - \pm L),$$

les quatre constantes  $\alpha_1^{\pm L}$ , qui peuvent s'écrire en fonction des dérivées du déplacement au bord, sont des inconnues qui se calculent par exemple en écrivant les quatre conditions aux limites. Nous obtenons

---

3. Il faut bien se rendre compte que les fréquences propres d'une plaque dépendent directement de l'épaisseur de celle-ci et qu'il est illusoire de croire qu'une tôle ou une vitre de 2 mm d'épaisseur est fabriquée avec une tolérance nettement meilleure à 20 microns.

finalemt deux équations intégrales couplées

$$\begin{aligned} u(x) &= G_p + S_1(x-L) + S_2(x-L) + S_1(x+L) + S_2(x+L) + \int_{-L}^{+L} P(x')G_p(x-x')dx' \\ P(x) &= \frac{4\omega^2\rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u(x')dx'. \end{aligned}$$

Notons que le déplacement peut aussi s'écrire :

$$u(x) = G_p + S_{1,2}(x \pm L) + \frac{4\omega^2\rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f|x''-x'|) u(x')G_p(x-x'')dx'dx''.$$

La seule manière de calculer  $u(x)$  et  $P(x)$  consiste à chercher une approximation numérique du déplacement et du saut de pression sous la forme de développement en séries de fonctions connues, les nouvelles inconnues deviennent les coefficients de ces séries :

$$u(x) = \sum_{m=1}^M u_m \gamma_m^u(x), P(x) = \sum_{n=1}^N P_n \gamma_n^P(x).$$

Les nouvelles inconnues sont  $u_m$  et  $P_n$ . Elles sont calculées par une méthode de Galerkin ou de collocation. Dans la première, on minimise une distance entre la fonction et son approximation. Dans la seconde, on écrit que les équations intégrales sont satisfaites en un nombre fini de points, les points de collocation.

Les fonctions d'approximation  $\gamma_{m,n}^{u,P}$  peuvent être constantes par morceaux, quadratiques ou polynomiales. Le nombre de fonctions à prendre en compte (l'ordre d'approximation des séries) dépend de la fréquence d'excitation, des caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure ou encore du fluide. En pratique, si on utilise des fonctions constantes par morceaux, on considère qu'un minimum de six points par longueur d'onde est nécessaire ; dix ou vingt points par longueur d'onde sont indispensables au voisinage des fréquences de résonance de la plaque couplée. En outre dans ce genre de problème pour lequel les longueurs d'ondes invoquées (mécaniques et acoustiques) sont différentes, il faut considérer les longueurs d'ondes les plus courtes (et donc les plus coûteuses). Pour des polynômes orthogonaux, il convient en général de diviser ce nombre par deux. On obtient finalement un système linéaire d'équations simultanées de dimension  $M + N + 4$  dont la taille augmente avec la fréquence. Très rapidement, on est limité par la taille de ce système qui dépasse les capacités de la machine ; que ce soit un problème de mémoire ou de temps de calcul des coefficients de la matrice (doubler le nombre d'inconnues quadruple la taille de la matrice). On peut montrer que la solution existe pour toute fréquence réelle du fait de la perte d'énergie par rayonnement. Les zéros du déterminant du système linéaire associé sont complexes. Ce sont les fréquences de résonance du système.

### Développement en série de modes propres *in vacuo*

Soit le couple mode propre-nombre d'onde propre  $(u_n(x), k_{pn})$ , celui-ci est la solution non nulle du système homogène :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_{pn}^4 \right) u_n(x) &= 0 \\ u_n(\pm L) = u_n''(\pm L) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin k_{pn}(x+L), k_{pn} = \frac{n\pi}{2L}.$$

Ces modes propres sont orthonormés par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{+L} f(x)g^*(x)dx.$$

Cherchons  $u(x)$  sous la forme d'un développement en série de ces modes propres :

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x), \alpha_m = \langle u(x), u_m(x) \rangle.$$

Reportons cette expression dans l'équation intégral-différentielle satisfaite par le déplacement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4}{dx^4} - k_p^4 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) \sum_{m=1}^M \alpha_m u_m(x') dx' &= \frac{f(x)}{D} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ u_m^{iv}(x) - k_p^4 u_m(x) + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_m(x') dx' \right\} &= \frac{f(x)}{D} \end{aligned}$$

or, par hypothèse  $u_m^{iv}(x) = k_{pm}^4 u_m(x)$ . Nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ (k_{pm}^4 - k_p^4) u_m(x) + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_m(x') dx' \right\} = \frac{f(x)}{D}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $u_n^*(x)$  et intégrons sur la longueur de la plaque. Nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ (k_{pm}^4 - k_p^4) \langle u_m(x), u_n(x) \rangle + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_m(x') u_n^*(x) dx dx' \right\} = f_n,$$

où  $f_n = \frac{1}{D} \int_{-L}^{+L} f(x) u_n^*(x) dx$ . Comme les modes propres sont orthonormés, nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ (k_{pm}^4 - k_p^4) \delta_m^n + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_m(x') u_n^*(x) dx dx' \right\} = f_n$$

où  $\delta_m^n$  est le symbole de Kronecker. Nous voyons alors que les coefficients  $\alpha_n$  sont les solutions d'un système linéaire infini plein. Notons que les zéros du déterminant de ce système sont tous de partie imaginaire non nulle. La différence entre ce dernier et celui obtenu dans le vide vient de l'intégrale double qui traduit l'effet du fluide sur la plaque. On dit souvent que la présence du fluide introduit un couplage intermodal. Lorsque l'influence du fluide sur la structure est faible (par exemple une plaque en acier dans l'air), ce couplage inter modal est faible et on peut négliger les termes :

$$\int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_m(x') u_n^*(x) dx dx', m \neq n$$

et obtenir un système linéaire infini mais diagonal qui s'inverse analytiquement pour donner :

$$\alpha_n = \frac{f_n}{(k_{pn}^4 - k_p^4) + \frac{4\omega^2 \rho_0}{D} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \text{H}_0(k_f|x-x'|) u_n(x') u_n^*(x) dx dx'}.$$

Lorsque la densité du fluide n'est pas négligeable, il est nécessaire de garder les termes non diagonaux. Pour pouvoir calculer les coefficients  $\alpha_n$ , il est nécessaire de tronquer les séries modales (et obtenir un système linéaire fini). Toute la difficulté vient du choix de la troncature. Bien souvent, la seule méthode consiste à choisir un nombre de mode  $N$ , inverser le système et calculer  $u^N(x)$ , puis recommencer avec un nombre de modes  $N' > N$  calculer  $u^{N'}(x)$  en espérant obtenir la précision souhaitée.

### Développement en série de modes propres couplés

De même que pour les modes propres dans le vide, il est possible de définir un couple mode propre-nombre d'onde propre  $(\tilde{u}_n(x), \tilde{k}_{pn})$  couplés, solution non nulle du système homogène :

$$\left( \frac{d^4}{dx^4} - \tilde{k}_{pn}^4 \right) \tilde{u}_n(x) + \frac{4\rho_0}{\rho_p h} \tilde{k}_{pn}^4 \int_{-L}^{+L} \frac{-\nu}{4} \mathbf{H}_0(k_f |x - x'|) \tilde{u}_m(x') dx' = 0$$

$$\tilde{u}_n(\pm L) = \tilde{u}_n''(\pm L) = 0.$$

Ces modes propres dépendent de la fréquence d'excitation puisque le noyau  $\mathbf{H}_0(k_f |x - x'|)$  dépend de la fréquence. De la même manière, les fréquences propres dépendent de la fréquence.

Pour établir les propriétés de ces modes propres, il est utile d'introduire la formulation faible (ou énergétique) du problème. Remarquons tout d'abord que si  $f \in L^2[-L, +L]$  -classe des fonctions de carré intégrable-, alors la solution  $u(x)$  appartient à l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $] -L, +L[$  ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 qui sont nulles ainsi que leurs dérivées secondes en  $x = \pm L$ . Les modes propres *in vacuo* constituent une base de cet ensemble. Ce qui signifie que toute solution du problème des plaques couplées peut être développée en série convergente de ces modes. Définissons les formes bilinéaires :

$$a(u, v) = D \int_{-L}^{+L} u''(x) v''^*(x) dx,$$

$$\beta_\omega(u, v) = \frac{-\nu}{4} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} u(x') \mathbf{H}_0(k_f |x - x'|) v^*(x') dx dx',$$

$$\langle u, v \rangle = \int_{-L}^{+L} u(x) v^*(x) dx.$$

Remarquons que  $a(u, v)$  est l'énergie de déformation de la plaque.  $\beta_\omega(u, v)$  correspond à l'énergie perdue par rayonnement. De plus, si nous intégrons par parties et si nous tenons compte des conditions aux limites, le terme  $a(u, v)$  devient  $\langle u^{iv}, v \rangle$ .

Le problème aux limites initial s'écrit sous la forme faible comme suit : trouver la fonction  $u$  qui vérifie les conditions aux limites telle que pour toute fonction qui satisfait aussi ces conditions on ait :

$$a(u, v) - \rho_p h \omega^2 \left( \langle u, v \rangle - \frac{4\rho_0}{\rho_p h} \beta_\omega(u, v) \right) = \langle f, v \rangle$$

**Remarques** : ce problème possède une et une seule solution pour toute fréquence réelle. Il possède une suite dénombrable de valeurs propres de parties imaginaires non nulle. À chacune d'entre elles, on peut associer un nombre fini de fonctions propres. L'ensemble de ces fonctions forme une base de l'ensemble défini ci-avant.

Par définition, les modes propres  $\tilde{u}_n(x)$  et les valeurs propres  $\tilde{\Lambda}_n = D\tilde{k}_{pn}^4$  sont les solutions non nulles du problème suivant :

$$a(\tilde{u}_n, v) = \tilde{\Lambda}_n (\langle \tilde{u}_n, v \rangle - \epsilon \beta_\omega(\tilde{u}_n, v)), \text{ pour tout } v,$$

où  $\epsilon = 4\rho_0/\rho_p h$  est le paramètre de couplage. Supposons que l'ordre de multiplicité des modes propres est unitaire. Posons  $v = \tilde{u}_m^*$ . Nous obtenons :

$$a(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*) = \tilde{\Lambda}_n (\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_m^* \rangle - \epsilon \beta_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*)),$$

or, nous avons les symétries suivantes :

$$a(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*) = a(\tilde{u}_m, \tilde{u}_n^*)$$

$$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_m^* \rangle = \langle \tilde{u}_m, \tilde{u}_n^* \rangle$$

$$\beta_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*) = \beta_\omega(\tilde{u}_m, \tilde{u}_n^*),$$

donc, de la première relation, nous déduisons :

$$\tilde{\Lambda}_n (\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_n, \tilde{u}_n^*)) = \tilde{\Lambda}_m (\langle \tilde{u}_m, \tilde{u}_n^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_m, \tilde{u}_n^*)),$$

soit si  $m \neq n$  et  $\tilde{\Lambda}_m \neq \tilde{\Lambda}_n$  :

$$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_m^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*) = 0, \text{ ou bien } a(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m^*) = 0.$$

Cette relation est une relation d'orthogonalité des modes propres couplés. Elle est analogue à celle satisfaite par les modes propres *in vacuo*; il suffit en effet de prendre  $\epsilon = 0$  pour la retrouver. La norme associée à cette relation est donnée par :

$$a(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n^*) = \tilde{\Lambda}_n [\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_n, \tilde{u}_n^*)].$$

Cette expression, qui relie les valeurs propres aux modes propres, montre que les valeurs propres dépendent de la fréquence par l'intermédiaire du terme de couplage. Il en est de même pour les modes propres. Pour chaque fréquence, nous devons donc déterminer la suite des fréquences et modes propres.

Cherchons maintenant la solution de notre problème par développement en série de ces modes propres couplés. Posons :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \tilde{u}_j(x),$$

et reportons ce développement dans l'équation variationnelle :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{ a(\tilde{u}_j, \tilde{u}_i^*) - \rho_p h \omega^2 (\langle \tilde{u}_j, \tilde{u}_i^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_j, \tilde{u}_i^*)) \} = \langle f, \tilde{u}_i^* \rangle,$$

où nous avons posé  $v = \tilde{u}_i^*$ . La relation d'orthogonalité satisfaite par les modes propres nous conduit à :

$$\alpha_i \{ a(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i^*) - \rho_p h \omega^2 (\langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_i^* \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_i, \tilde{u}_i^*)) \} = \langle f, \tilde{u}_i^* \rangle,$$

soit finalement

$$\alpha_i \left\{ \frac{\tilde{\Lambda}_i - \rho_p h \omega^2}{\tilde{\Lambda}_i} a(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i^*) \right\} = \langle f, \tilde{u}_i^* \rangle.$$

Nous obtenons ainsi le développement en série de modes couplés qui est défini pour toute fréquence d'excitation réelle :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Lambda}_i}{\tilde{\Lambda}_i - \rho_p h \omega^2} \frac{\langle f, \tilde{u}_i^* \rangle}{a(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i^*)} \tilde{u}_j(x).$$

Toute la difficulté de cette méthode vient du calcul des modes propres qui ne peut se réaliser que numériquement.

### 4.4.3 Approximation fluide léger

Lorsque la densité du fluide est petite devant celle de la structure, l'influence de celui-ci est faible. Le déplacement de la plaque est voisin de celui de la plaque *in vacuo*. Nous allons voir que des méthodes de perturbation (développement en série de puissance du petit paramètre  $\epsilon$ ) permettent de se ramener à la résolution de suites de problèmes de plaque *in vacuo* plus simples. Cette technique présente néanmoins le gros désavantage de ne pas conserver existence et l'unicité de la solution. Nous appliquons ensuite ces techniques au calcul des modes propres couplés. Cette dernière façon de procéder est plus satisfaisante puisqu'elle permet de conserver à la solution approchée les principales propriétés de la solution du problème initial : existence et unité de la solution pour toute fréquence d'excitation. Nous proposerons enfin quelques approximations analytiques qui permettent de relier la solution mathématique à la physique du problème.

**Solution par développement en série de modes propres *in vacuo***

Repartons du problème intégro-différentiel aux limites initial :

$$Du^{iv}(x) - \rho_p h \omega^2 \left( u(x) - \epsilon \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) u(x) dx \right) = f(x)$$

$$u(\pm L) = u''(\pm L) = 0,$$

pour  $\epsilon$  est suffisamment petit ( $\epsilon = 0,065 \text{ m}^{-1}$  pour une plaque en acier de 1cm d'épaisseur dans l'air), on choisit de développer  $u(x)$  en série de puissances croissantes de  $\epsilon$  :

$$u(x) = u^0(x) + \epsilon u^1(x) + \epsilon^2 u^2(x) + \dots$$

Reportons ce développement dans le système d'équations à résoudre. Nous obtenons :

$$D(u^{0iv}(x) + \epsilon u^{1iv}(x)) - \rho_p h \omega^2 \left( u^0(x) + \epsilon u^1(x) - \epsilon \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) (u^0(x) + \epsilon u^1(x)) dx \right) = f(x)$$

$$u^0(\pm L) + \epsilon u^1(\pm L) = u^{0''}(\pm L) + \epsilon u^{1''}(\pm L) = 0.$$

Regroupons les termes des puissances de  $\epsilon$  :

$$\epsilon^0 : Du^{0iv}(x) - \rho_p h \omega^2 u^0(x) = f(x)$$

$$u^0(\pm L) = u^{0''}(\pm L) = 0,$$

$$\epsilon : Du^{1iv}(x) - \rho_p h \omega^2 \left( u^1(x) - \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) u^0(x) dx \right) = 0$$

$$u^1(\pm L) = u^{1''}(\pm L) = 0.$$

Il est évident qu'à l'ordre zéro, la solution se calcule simplement par développement sur la base des modes propres *in vacuo*. Le principal problème vient du fait que cette solution n'est pas définie pour les fréquences de la plaque *in vacuo* alors que la solution du problème initial est définie pour toute fréquence. À l'ordre un, nous obtenons :

$$Du^{1iv}(x) - \rho_p h \omega^2 u^1(x) = -\rho_p h \omega^2 \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) u^0(x) dx$$

$$u^1(\pm L) = u^{1''}(\pm L) = 0.$$

À nouveau, la solution de ce problème se calcule facilement sur la base des modes propres *in vacuo*, toujours avec ce problème de non-existence de la solution pour certaines fréquences. Nous obtenons finalement :

$$u^i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^i}{k_{pn}^4 - k_p^4} u_n(x),$$

où

$$f_n^0 = \frac{1}{D} \int_{-L}^{+L} f(x) u_n(x) dx$$

$$f_n^1 = \frac{-\rho_p h \omega^2}{D} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) u^0(x) u_n(x') dx dx'$$

$$= \frac{-\rho_p h \omega^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m^0}{k_{pn}^4 - k_p^4} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{-\imath}{4} \text{H}_0(k_f |x - x'|) u_m(x) u_n(x') dx dx'$$

$$= \frac{-\rho_p h \omega^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m^0}{k_{pn}^4 - k_p^4} \beta_{\omega}(u_m, u_n^*).$$

Cette dernière expression fait intervenir des intégrales doubles. Il est clair que le calcul de termes plus élevés de la série de perturbation fait apparaître des intégrations d'ordre toujours plus élevé. À l'ordre deux, il faut calculer une intégrale triple. Le calcul devient impraticable. Nous retrouvons lé une propriété générale des séries de perturbation : ce sont des méthodes performantes pour autant que l'on se contente des deux premiers termes, au-delà, il vaut mieux résoudre le problème exact.

### Calcul des modes propres et des fréquences propres de la plaque couplée

Afin d'éviter ce problème d'indétermination de la solution au voisinage des fréquences propres *in vacuo*, il convient d'utiliser le développement en série de modes propres couplés. Calculons-les par une méthode de perturbation. Notons que puisque les valeurs propres et les fréquences propres dépendent du couplage avec le fluide, nous devons les chercher toutes les deux sous forme de série de perturbation :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n(x) &= \tilde{u}_n^0(x) + \epsilon \tilde{u}_n^1(x) + \epsilon^2 \tilde{u}_n^2(x) + \dots \\ \tilde{\Lambda}_n &= \tilde{\Lambda}_n^0 + \epsilon \tilde{\Lambda}_n^1 + \epsilon^2 \tilde{\Lambda}_n^2 + \dots,\end{aligned}$$

reportons ces expressions dans l'équation satisfaite par les modes et valeurs propres :

$$a(\tilde{u}_n^0 + \epsilon \tilde{u}_n^1, v) = \left( \tilde{\Lambda}_n^0 + \epsilon \tilde{\Lambda}_n^1 \right) (\langle \tilde{u}_n^0 + \epsilon \tilde{u}_n^1, v \rangle - \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_n^0 + \epsilon \tilde{u}_n^1, v)), \text{ pour tout } v.$$

La linéarité de  $a(u, v)$ ,  $\langle u, v \rangle$  et  $\beta_\omega(u, v)$ , nous permet obtenir :

$$\begin{aligned}a(\tilde{u}_n^0, v) + \epsilon a(\tilde{u}_n^1, v) &= \tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_n^0, v \rangle \\ &+ \epsilon \left\{ \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, v \rangle + \tilde{\Lambda}_n^0 (\langle \tilde{u}_n^1, v \rangle - \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, v)) \right\} + \dots, \text{ pour tout } v.\end{aligned}$$

À l'ordre zéro, nous avons :

$$a(\tilde{u}_n^0, v) = \tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_n^0, v \rangle,$$

cette équation est l'équation des modes et valeurs propres *in vacuo* que nous savons résoudre aisément. Tandis qu'à l'ordre un en  $\epsilon$  :

$$a(\tilde{u}_n^1, v) = \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, v \rangle + \tilde{\Lambda}_n^0 (\langle \tilde{u}_n^1, v \rangle - \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, v)).$$

Dans cette dernière, portons  $v = \tilde{u}_n^{0*}$ . Nous obtenons :

$$a(\tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*}) = \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle + \tilde{\Lambda}_n^0 (\langle \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} \rangle - \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*})),$$

or  $a(\tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*}) = a(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{1*})$  et de part la définition des modes propres dans le vide  $a(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{1*}) = \tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{1*} \rangle$ . Si nous reportons ce résultat dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{1*} \rangle = \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle + \tilde{\Lambda}_n^0 (\langle \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} \rangle - \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*})),$$

soit encore en simplifiant par  $\tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{1*} \rangle$  :

$$\tilde{\Lambda}_n^1 = \tilde{\Lambda}_n^0 \frac{\beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*})}{\langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle}.$$

Rappelons que les modes propres dans le vide sont de norme unité soit  $\langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle = 1$ . Finalement :

$$\tilde{\Lambda}_n^1 = \tilde{\Lambda}_n^0 \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*}).$$

Pour calculer  $\tilde{u}_n^1$ , développons celui-ci en série des modes propres dans le vide :

$$\tilde{u}_n^1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m \tilde{u}_m^0(x),$$

reportons cette relation dans l'équation des modes  $\tilde{u}_m^1(x)$  (équation à l'ordre un en  $\epsilon$ ), prise pour  $v = \tilde{u}_j^{0*}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m a(\tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*}) &= \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle + \tilde{\Lambda}_n^0 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m \langle \tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle - \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*}) \right) \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m \left( a(\tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*}) - \tilde{\Lambda}_n^0 \langle \tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle \right) &= \tilde{\Lambda}_n^1 \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle - \tilde{\Lambda}_n^0 \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*}). \end{aligned}$$

Les propriétés des modes propres *in vacuo* nous donnent :

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*}) &= 0 \text{ si } m \neq j \\ &= \tilde{\Lambda}_j^0 \langle \tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle = \tilde{\Lambda}_j^0 \text{ si } m = j \\ \langle \tilde{u}_m^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle &= \delta_m^j \\ \langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle &= \delta_n^j, \end{aligned}$$

donc si  $n \neq j$ , nous avons (les indices du second membre "commandent") :

$$\begin{aligned} \alpha_n^j (\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_n^0) \langle \tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*} \rangle &= -\tilde{\Lambda}_n^0 \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*}) \\ \alpha_n^j (\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_n^0) &= -\tilde{\Lambda}_n^0 \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*}) \\ \alpha_n^j &= -\frac{\tilde{\Lambda}_n^0}{\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_n^0} \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_j^{0*}). \end{aligned}$$

Les coefficients  $\alpha_n^j$  sont déterminés de manière unique. Par contre, si  $n = j$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_j^j (\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_j^0) &= \tilde{\Lambda}_j^1 - \tilde{\Lambda}_j^0 \beta_\omega(\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*}) \\ \text{or } \tilde{\Lambda}_j^1 &= \tilde{\Lambda}_j^0 \beta_\omega(\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*}) \\ \Rightarrow \alpha_j^j (\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_j^0) &= (\tilde{\Lambda}_j^0 - \tilde{\Lambda}_j^0) \beta_\omega(\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*}) \\ \Rightarrow \alpha_j^j \times 0 &= 0 \times \beta_\omega(\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^{0*}) \end{aligned}$$

nous avons une forme indéterminée. On montre facilement qu'il faut choisir  $\alpha_j^j = 0$ . Pour ce faire, on impose que la relation d'orthogonalité des modes couplés soit satisfaite à  $\epsilon^2$  près. Soit  $\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n^* \rangle = \langle \tilde{u}_n^0 + \epsilon \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} + \epsilon \tilde{u}_n^{1*} \rangle = 1$ . Soit après développement  $\langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle + 2\epsilon \langle \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1$ . Soit bien évidemment, à l'ordre 0 en  $\epsilon$  :  $\langle \tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*} \rangle = 1$  et à l'ordre 1 en  $\epsilon$  :  $2\langle \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} \rangle = 0$ . La première relation est satisfaite de part les propriétés des modes propres dans le vide. La seconde donne

$$\langle \tilde{u}_n^1, \tilde{u}_n^{0*} \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m \tilde{u}_m^0(x), \tilde{u}_n^{0*} \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^m \langle \tilde{u}_m^0(x), \tilde{u}_n^{0*} \rangle = \alpha_n^m \langle \tilde{u}_m^0(x), \tilde{u}_m^{0*} \rangle = \alpha_n^m = 0 \text{ cqfd.}$$

Nous obtenons finalement :

$$\tilde{u}_n^1(x) = \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \frac{-\tilde{\Lambda}_n^0}{\tilde{\Lambda}_m^0 - \tilde{\Lambda}_n^0} \beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_m^{0*}) \tilde{u}_m^0(x).$$

On peut noter que le terme correctif de chaque déformée modale est orthogonal au mode considéré et que son intensité est gouvernée par le couplage intermodal (terme  $\beta_\omega(\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_m^{0*})$ ).

Le développement en série de modes couplés s'écrit finalement :

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Lambda}_n^0 + \epsilon \tilde{\Lambda}_n^1}{\tilde{\Lambda}_n^0 + \epsilon \tilde{\Lambda}_n^1 - \rho_p h \omega^2} \frac{\langle f, \tilde{u}_m^{0*} + \epsilon \tilde{u}_m^{1*} \rangle}{a(\tilde{u}_m^0 + \epsilon \tilde{u}_m^1, \tilde{u}_m^{0*} + \epsilon \tilde{u}_m^{1*})} (\tilde{u}_m^0(x) + \epsilon \tilde{u}_m^1(x)).$$



Notons que les termes  $\tilde{\Lambda}_n^1$  sont de partie imaginaire non nulle et permettent ainsi d'obtenir une solution définie pour toute fréquence réelle. La réponse de la plaque est bien entendu maximale lorsque la fréquence d'excitation est égale à la partie réelle de la fréquence propre.

### Remarques

1. Nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_n &= \tilde{\Lambda}_n^0 \{1 + \epsilon \beta_\omega (\tilde{u}_n^0, \tilde{u}_n^{0*})\} \\ &= \tilde{\Lambda}_n^0 \left\{ 1 + \frac{-i\epsilon}{4} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \text{H}_0(k_f|x-x'|) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' \right\}, \\ &= \tilde{\Lambda}_n^0 \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{4} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \text{Y}_0(k_f|x-x'|) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\epsilon}{4} \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \text{J}_0(k_f|x-x'|) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' \right\},\end{aligned}$$

é basse fréquence,  $k_f \ll 1$  et

$$\begin{aligned}\text{Y}_0(k_f x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln k_f x < -\eta, \\ \text{J}_0(k_f x) &\approx 1\end{aligned}$$

donc, si nous remplaçons ces approximations dans les intégrales ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \text{J}_0(k_f|x-x'|) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' &\approx \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' = \left( \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) dx \right)^2 > 0, \\ \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \text{Y}_0(k_f|x-x'|) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' &\approx -\eta \int_{-L}^{+L} \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) \tilde{u}_n^0(x') dx dx' \\ &< -\eta \left( \int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) dx \right)^2 < 0.\end{aligned}$$

Nous voyons ainsi qu'à basse fréquence, les valeurs propres sont de partie imaginaire négative, ce qui correspond à un amortissement par rayonnement. Ce résultat reste vrai à haute fréquence. Le principe de conservation de l'énergie est satisfait. De plus, nous voyons, par le décalage de la partie réelle des valeurs propres vers les basses fréquences, apparaître l'effet connu sous le nom de "masse ajoutée". Cet effet traduit le fait que la présence du fluide augmente la masse volumique apparente de la structure qui introduit un décalage du spectre vers les graves. Notons que cet effet s'amenuise lorsque la fréquence d'excitation augmente.

2. Soit

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{+L} \tilde{u}_n^0(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{+L} \sin \frac{n\pi(x+L)}{2L} dx \\ &= \frac{2L}{n\pi\sqrt{L}} (1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{2L}{n\pi\sqrt{L}} (1 - (-1)^n).\end{aligned}$$

Les modes pairs (ou modes antisymétriques car ils ont un nœud au centre) ne "voient" pas le fluide pour l'approximation réalisée ici puisque tant l'amortissement que la masse ajoutée sont nuls. Ce résultat, bien qu'étant le fruit de deux approximations (fluide léger et basse fréquence), décrit assez fidèlement le comportement vibroacoustique des plaques appuyées.



# Chapitre 5

## Couplage aéroélastique

Ce chapitre aborde divers aspects du couplage aéroélastique : prise en compte des fluctuations de pressions dans un écoulement comme force excitatrice d'une structure vibrante ; effet de la géométrie d'une structure rigide comme générateur d'instabilité et de fluctuation de pression ; échange d'énergie entre une structure vibrante et l'écoulement en contact avec celle-ci. Il débute par une présentation simplifiée entre la vibration mais non simpliste des vibrations d'une plaque mince excitée par un écoulement turbulent ; ce modèle reste simple car il néglige les effets de la vibration de la structure sur la nature de l'écoulement et du fluide sur la vibration de la plaque. Il se poursuit par l'étude du champ de pression périodique créé par une structure vibrante décrite par un modèle élémentaire dans un écoulement. Il se termine par une première étude complète de la rétroaction entre une structure vibrante et l'écoulement qui prend naissance autour de celle-ci.

### 5.1 Vibrations d'une plaque mince excitée par un écoulement turbulent

On considère une plaque finie soumise à des conditions aux limites quelconques dans un plan rigide infini en contact, sur une de ses faces, avec un écoulement turbulent. On considère ici pour simplifier que l'écoulement et la vibration de la plaque sont totalement découplés ; cette approximation est généralement vérifiée pour les plaques minces de petites dimensions (inférieures au mètre) car les amplitudes vibratoires de telles plaques sont millimétriques ou submillimétriques et de fait nettement inférieures aux dimensions caractéristiques d'une couche limite pleinement développée (centimétriques), ceci n'étant évidemment plus vérifié dans les zones de transitions. En chaque point, la plaque est excitée par une fluctuation de pression qui est vue comme un processus aléatoire. Soit  $f(M, t)$ , une réalisation de ce processus et  $F(M, \omega)$  sa transformée de Fourier temporelle. On nomme  $\Gamma(M, M', \omega)$  le noyau de Green de la plaque finie.

La transformée de Fourier d'une réalisation du déplacement est donnée par

$$u(M, \omega) = \int F(Q, \omega) \Gamma(M, Q, \omega) dQ$$

L'interspectre du déplacement est donné par

$$u(M, \omega) u^*(M', \omega) = \int \int \Gamma(M, Q, \omega) F(Q, \omega) F^*(Q', \omega) \Gamma^*(M', Q', \omega) dQ dQ'$$

La moyenne (dans le domaine de Fourier) de l'interspectre du déplacement est la densité interspectrale du déplacement  $S_u(M, M', \omega) = \overline{u(M, \omega) u^*(M', \omega)}$ . Comme seul le terme de forage  $F(Q, \omega)$  est aléatoire, on obtient

$$S_u(M, M', \omega) = \int \int \Gamma(M, Q, \omega) \overline{F(Q, \omega) F^*(Q', \omega)} \Gamma^*(M', Q', \omega) dQ dQ'$$

$S_F(Q, Q', \omega) = \overline{F(Q, \omega)F^*(Q', \omega)}$  est la densité interspectrale de fluctuation de pression pariétale turbulente.

On doit donc estimer la densité interspectrale de l'excitation  $S_F(Q, Q', \omega)$  et le noyau de Green de la plaque  $\Gamma(M, Q, \omega)$ .

### 5.1.1 Densité interspectrale : modèle de Corcos

Une des principales difficultés de modélisation de cette densité spectrale tient au fait que dans une bande de fréquence donnée, de nombreux tourbillons contribuent à la valeur cherchée. Les petites structures, localisées au voisinage de la paroi, se déplacent lentement alors que les grosses structures, éloignées de la paroi, se déplacent plus vite. Si le rapport  $\omega = U_c/\ell$  (vitesse de convection/taille caractéristique) est identique pour chaque structure, elles contribuent toutes au champ pariétal de pression turbulente. Généralement, on écrit

$$S_F(Q, Q', \omega) = S_{pp}(Q, \omega)C(Q, Q', \omega)e^{i\phi(Q, Q', \omega)}$$

où  $S_{pp}(Q, \omega)$  est le spectre de pression ponctuel. Généralement, on considère un modèle de turbulence établie et donc  $S_{pp}(Q, \omega) = S_{pp}(\omega)$ .  $C(Q, Q', \omega)$  est une fonction de cohérence qui traduit la similarité de la pression entre les points  $Q$  et  $Q'$ .  $\phi(Q, Q', \omega)$  décrit la relation de phase entre les points. Pour fixer les idées, on considère un écoulement au-dessus d'un plan  $(O, x, y)$  suivant la direction  $x$ . La phase dépend principalement de la séparation  $r_x = x - x'$ . Elle est liée à la vitesse de convection  $U_c$  par

$$\phi(Q, Q', \omega) = \omega r_x / U_c(\omega).$$

$C(Q, r_x, r_y, \omega)$  est liée à deux échelles intégrales de longueur  $L_x$  et  $L_y$ . On a  $L_x(Q, \omega) = \int_0^\infty C(Q, r_x, r_y = 0, \omega) dr_x$  et une relation similaire pour la direction transverse. La corrélation dans le sens de l'écoulement est bien entendu bien plus forte que dans le sens transversal.

Dans le modèle de Corcos on considère que les cohérences en  $x$  et  $y$  sont découplées (ce qui est bien évidemment faux mais permet de séparer les variables) et que l'on a une dépendance exponentielle :

$$\begin{aligned} S_F(Q, Q', \omega) &= S_{pp}(\omega) e^{-|r_x|/L_x} e^{-|r_y|/L_y} e^{i\omega r_x / U_c(\omega)} \\ &= S_{pp}(\omega) e^{-|r_x|\alpha_x \omega / U_c} e^{-|r_y|\alpha_y \omega / U_c} e^{i\omega r_x / U_c(\omega)} \end{aligned}$$

Les paramètres  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $U_c$  et  $S_{pp}(\omega)$  sont identifiés à partir de mesures. On peut se contenter de choisir  $S_{pp}(\omega) = 1$  (bruit blanc),  $\alpha_x = 0, 1$ ,  $\alpha_y = 7\alpha_x$  et  $U_c = 0, 7u_\infty$ .

Dans le domaine des nombre d'onde (transformée de Fourier spatiale), on a

$$S_F(k_x, k_y, \omega) = 4\alpha_x \alpha_y S_{pp}(\omega) \left( \frac{U_c}{\omega} \right)^2 / \left[ \left( \alpha_y^2 + \left( \frac{U_c^2 k_y^2}{\omega^2} \right) \right) \left( \alpha_x^2 + \left( \frac{U_c k_x}{\omega} - 1 \right)^2 \right) \right]$$

Ce modèle souffre de nombreux défaut : il décrit mal les corrélation spatiales, la "tache de cohérence" est en forme de losange allongé dans le sens de l'écoulement (au lieu d'une forme plus régulière comme une ellipse); aux très basses fréquences spatiales, on ne retrouve pas un spectre qui se comporte en  $k^2$  (théorème de Kraichnan-Phillips); il décrit mal (pas du tout!) les phénomènes acoustiques (bruit propre de la turbulence) aux faibles nombres d'onde (au voisinage de  $\omega/c_0$ ). Par contre il décrit bien le pic convectif (autour de  $\omega/U_c$ ) et il est facile à mettre en œuvre du fait de la séparation de variables.

### 5.1.2 Représentation de Green de la plaque couplée

Considérons une plaque enchâssée dans un plan réfléchissant au-dessus duquel on a un écoulement parallèle à l'axe  $x$  de Mach  $M_0$ . On cherche à calculer la fonction de Green de la plaque couplée. Soit

$Q = (x, y)$  un point de la plaque et  $M = (x, y, z)$  un point du demi-espace  $\Omega^+$ . Le noyau de Green de la plaque  $\Gamma(Q, Q', \omega) = \Gamma(Q - Q', \omega)$  et la pression acoustique  $p(M)$  satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$D \left( \Delta_Q^2 - \frac{\rho_p h \omega^2}{D} \right) \Gamma(Q, \omega) = \delta(Q) - P(Q), Q \in \Sigma$$

$$\text{où } P(Q) = \lim_{M \in \Omega^+ \rightarrow Q \in \Sigma} p(M)$$

$$\Delta p(M) + k_f^2 p(M) + 2i k_f M_0 \frac{\partial p}{\partial x} - M_0^2 \frac{\partial^2 p(M)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial \vec{n}_Q} = \begin{cases} \rho_0 (-i\omega + c_0 M_0 \frac{\partial}{\partial x})^2 \Gamma(Q, \omega), Q \in \Sigma \\ 0, Q \in \Sigma' \end{cases}$$

é ces équations, il convient de rajouter les conditions aux limites et les conditions de Sommerfeld.  $k_p = \sqrt[4]{\frac{\rho_p h \omega^2}{D}}$  est le nombre d'onde de la plaque infinie *in vacuo* et  $k_f = \frac{\omega}{c_f}$  le nombre d'onde acoustique.

On utilise la représentation de Green de la pression avec pour noyau de Green  $G_e(M, M') = -e^{ik_f \tilde{R}} / (4\pi\beta R^*) - e^{ik_f \tilde{R}_i} / (4\pi\beta R_i^*)$ , où  $\tilde{R}_i$  et  $R_i^*$  sont les images de  $\tilde{R}$  et  $R^*$  par rapport au plan horizontal (on porte  $-z$  à la place de  $z$ ). On obtient un système d'équations intégrodifférentielles qui régit le déplacement de la plaque et la pression surfacique

$$\begin{aligned} D \left( \Delta^2 - \frac{\rho_p h \omega^2}{D} \right) \Gamma(Q, \omega) &= \delta(Q) - P(Q) \\ P(Q) &= \frac{\rho_0 \omega^2}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \Gamma(Q', \omega) dQ' \\ &+ \frac{2i\rho_0 \omega c_0 M_0}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \frac{\partial \Gamma(Q', \omega)}{\partial x'} dQ' - \frac{\rho_0 c_0^2 M_0^2}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \frac{\partial^2 \Gamma(Q', \omega)}{\partial x'^2} dQ' \end{aligned}$$

On note que du fait de l'écoulement, la plaque peut rayonner efficacement à basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ). Ces deux équations se ramènent à une seule équation intégrodifférentielle pour le déplacement :

$$\begin{aligned} D \left( \Delta^2 - \frac{\rho_p h \omega^2}{D} \right) \Gamma(Q, \omega) &+ \frac{\rho_0 \omega^2}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \Gamma(Q', \omega) \\ &+ \frac{2i\rho_0 \omega c_0 M_0}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \frac{\partial \Gamma(Q', \omega)}{\partial x'} dQ' - \frac{\rho_0 c_0^2 M_0^2}{\beta} \int_{\Sigma} G_e(Q, Q') \frac{\partial^2 \Gamma(Q', \omega)}{\partial x'^2} dQ' = \delta(Q) \end{aligned}$$

**Méthode approchée de calcul** Ces équations sont difficiles à résoudre. Plusieurs types d'approximations sont réalisées pour les simplifier. En premier lieu, si on est à faible Mach, on peut négliger les deux dernières intégrales dans la pression surfacique (leur influence se fait principalement ressentir au voisinage des maxima de réponse de la plaque et diminue fortement avec la fréquence).

La seconde approximation n'est valide que lorsque le fluide en contact avec la plaque est de faible densité (comme de l'air) et consiste à négliger l'influence de la pression acoustique surface sur la plaque. On se ramène à un calcul de réponse de plaque dans le vide par une méthode usuelle (comme un développement modal) et de rayonnement par une intégrale de Kirchhoff-Helmholtz.

### 5.1.3 Exemple d'une plaque rectangulaire appuyée

Prenons l'exemple d'une plaque amortie (d'amortissement  $\eta$ ) dans le vide dont le noyau de Green de la plaque est donné par la décomposition modale suivante

$$\Gamma(Q, Q', \omega) = \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(Q) u_{mn}(Q')}{\rho_p h (\omega_{mn}^2 (1 - i\eta) - \omega^2)}$$

$\omega_{mn}$  sont les valeurs propres et  $u_{mn}(M)$  sont les modes propres.

La densité interspectrale de déplacement de la plaque est donnée par

$$S_u(M, M', \omega) = \int \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(M)u_{mn}(Q')}{\rho_p h (\omega_{mn}^2(1 - \eta) - \omega^2)} S_F(Q, Q', \omega) \sum_{i,j} \frac{u_{ij}^*(M')u_{ij}^*(Q')}{\rho_p h (\omega_{ij}^2(1 - \eta) - \omega^2)^*} dQdQ'$$

$$S_u(M, M', \omega) = \sum_{m,n,i,j} \frac{u_{mn}(M)u_{ij}^*(M')}{\rho_p^2 h^2 (\omega_{mn}^2(1 - \eta) - \omega^2)(\omega_{ij}^2(1 + \eta) - \omega^2)} I_{mni j}$$

où  $I_{mni j} = \int u_{mn}(Q')S_F(Q, Q', \omega)u_{ij}^*(Q')dQdQ'$  représente la force généralisée qui excite la structure. Si les modes propres de la plaque sont de la forme  $u_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y)$  et si le modèle d'excitation de la plaque est un modèle de type Corcos, la séparation des variables nous permet de transformer l'intégrale quadruple  $I_{mni j}$  coûteuse à calculer en un produit d'intégrales doubles  $I_{mni j}(\omega, \alpha_x, \alpha_y, U_c) = S_{pp}(\omega)I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c)J_{nj}(\omega, \alpha_y, U_c)$  où

$$I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c) = \iint X_m(x)X_i(x')e^{-\frac{\alpha_x \omega |x-x'|}{U_c}} e^{i\frac{\omega(x-x)}{U_c}} dx dx'$$

et

$$J_{nj}(\omega, \alpha_y, U_c) = \iint Y_n(y)Y_j(y')e^{-\frac{\alpha_y \omega |y-y'|}{U_c}} dy dy'$$

Du fait de la dépendance spatiale du modèle de Corcos en fonction exponentielles, les intégrales doubles  $I_{mi}(\omega, \alpha_x, U_c)$  et  $J_{nj}(\omega, \alpha_y, U_c)$  sont calculables analytiquement, même si les expressions obtenues sont un peu complexes. Afin de fixer les idées on présente, pour une plaque de dimension  $L_x \times L_y$ , les résultats pour  $i = m$  et  $j = n$  :

$$I_{mm}(\omega, \alpha_x, U_c) = \pi L_x^2 m U_c^3 \left( \frac{(-1)^{m+1} \exp^{-\frac{L_x(\alpha_x + \iota)\omega}{U_c}} (\pi^2 m^2 U_c^2 + L_x^2 (\alpha_x - \iota)^2 \omega^2)}{\pi m U_c + L_x (1 - \iota \alpha_x) \omega} \right.$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1} \exp^{-\frac{L_x(\alpha_x + \iota)\omega}{U_c}} (\pi^2 m^2 U_c^2 + L_x^2 (\alpha_x - \iota)^2 \omega^2)}{\pi m U_c + \iota L_x (\alpha_x + \iota) \omega}$$

$$+ \frac{2\pi m U_c (\pi^2 m^2 U_c^2 + L_x^2 (\alpha_x - \iota)^2 \omega^2)}{(\pi_p U_c + L_x (1 - \iota \alpha_x) \omega) (\pi m U_c + \iota L_x (\alpha_x + \iota) \omega)}$$

$$+ \frac{\pi^2 m^2 U_c^2 + L_x^2 (\alpha_x + \iota)^2 \omega^2}{\pi m U_c + L_x (-1 - \iota \alpha_x) \omega}$$

$$- \frac{2\pi (-1)^m m U_c \exp^{-\frac{L_x(\alpha_x - \iota)\omega}{U_c}} (\pi^2 m^2 U_c^2 + a^2 (\alpha_x + \iota)^2 \omega^2)}{(\pi m U_c + L_x (-1 - \iota \alpha_x) \omega) (\pi m U_c + L_x (1 + \iota \alpha_x) \omega)}$$

$$+ \left. \frac{\pi^2 m^2 U_c^2 + L_x^2 (\alpha_x + \iota)^2 \omega^2}{\pi m U_c + L_x (1 + \iota \alpha_x) \omega} \right)$$

$$/ \left( 2 \left( L_x^4 (\alpha^2 + 1)^2 \omega^4 + 2\pi^2 L_x^2 (\alpha_x^2 - 1) m^2 U_c^2 \omega^2 + \pi^4 m^4 U_c^4 \right) \right)$$

$$J_{nn}(\omega, \alpha_y, U_c) = \frac{L_y^2 U_c \left( b^3 \alpha_y^3 \omega^3 + \pi^2 n^2 U_c^2 \left( L_y \alpha_y \omega + U_c \left( 2 - 2(-1)^n \exp^{-\frac{L_y \alpha_y \omega}{U_c}} \right) \right) \right)}{(L_y^2 \alpha_y^2 \omega^2 + \pi^2 n^2 U_c^2)^2}$$

Lorsque que l'on s'intéresse à la densité spectrale du déplacement de la plaque, on obtient

$$S_u(M, \omega) = \sum_{m,n,i,j} \frac{X_m(x)Y_n(y)X_i(x)Y_j(y)}{\rho_p^2 h^2 (\omega_{mn}^2(1 - \eta) - \omega^2)(\omega_{ij}^2(1 + \eta) - \omega^2)} I_{mni j}(\omega, \alpha_x, \alpha_y, U_c)$$

La moyenne de cette densité sur toute la plaque s'écrit  $S_u(\omega) = 1/A \int \int S_u(x, y, \omega) dx dy$ , où  $A$  est la surface occupée par la plaque. L'orthonormalité des modes de plaque nous permet d'annuler les termes croisés pour ne retenir qu'une somme double

$$S_u(\omega) = \sum_{m,n} \frac{I_{mm}(\omega, \alpha_x, U_c) J_{nn}(\omega \alpha_y, U_c)}{\rho_p^2 h^2 (\omega_{mn}^2 (1 - \eta) - \omega^2)^2}$$

Lorsque l'on s'intéresse à la densité spectrale moyenne de vitesse de la plaque  $S_v(\omega)$ , on a évidemment

$$S_v(\omega) = \sum_{m,n} (-\omega^2) \frac{I_{mm}(\omega, \alpha_x, U_c) J_{nn}(\omega \alpha_y, U_c)}{\rho_p^2 h^2 (\omega_{mn}^2 (1 - \eta) - \omega^2)^2}$$

La réponse de la plaque est maximale lorsque  $\omega \approx \omega_{mn}$  et lorsque  $I_{mm}(\omega, \alpha_x, U_c)$  et  $J_{nn}(\omega \alpha_y, U_c)$  sont maximales. On montre que cela arrive lorsque la nombre d'onde d'excitation  $k_e = \omega/U_c$  est voisin d'un nombre d'onde propre de la plaque  $k_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} \sqrt{\rho_p h/D}}$ . On montre aussi, que pour une vitesse d'écoulement donnée, il y a toujours une fréquence pour laquelle ce phénomène, nommé coïncidence hydrodynamique, apparaît. Cette coïncidence hydrodynamique correspond au fait que la vitesse d'écoulement est égale à la vitesse de propagation des ondes de flexion dans la plaque (qui est un milieu dispersif). On peut à l'inverse calculer, pour une vitesse d'écoulement la fréquence de coïncidence hydrodynamique. On a  $U_c(\omega_c) = c_f(\omega_c)$  Soit

$$\begin{aligned} k_f &= \sqrt{\omega \sqrt{\rho_p h/D}} = \omega/c_f \\ c_f &= \frac{\omega}{\sqrt{\omega \sqrt{\rho_p h/D}}} = \sqrt{\omega} / \sqrt[4]{\rho_p h/D} \end{aligned}$$

Soit  $\omega_c = U_c^2 \sqrt{\rho_p h/D}$ .

On présente dans la figure 5.1 un calcul de densités spectrales moyennes de vitesse d'une plaque rectangulaire appuyée excitée par un écoulement turbulent. La plaque en aluminium a pour dimensions  $0,58 \times 0,42 \times 0,003$  m<sup>3</sup>. Les paramètres du modèle de Corcos retenus sont  $\alpha_x = 0,25$ ,  $\alpha_y = 1$ ,  $U_c = 3/4 U_\infty$  avec  $U_\infty = 100$  m/s, 200 m/s, 300 m/s. Afin de comparer les réponses de la plaque,  $S_{pp}(\omega)$  est fixé constant à 1 pour les 3 calculs ce qui est bien évidemment non physique. Pour les 3 vitesses d'écoulement, la coïncidence aérodynamique est :  $f_c = 200$  Hz pour  $U_c = 75$  m/s,  $f_c = 800$  Hz pour  $U_c = 150$  m/s et  $f_c = 1800$  Hz pour  $U_c = 225$  m/s. Ces fréquences ont été matérialisées par trois traits verticaux noirs sur la figure. On note qu'avant la coïncidence aérodynamique, les réponses des plaques sont comparables et ne commencent à différer qu'au-delà de cette fréquence. La réponse pour des fréquences plus hautes que la fréquence de coïncidence aérodynamique est moins forte car le forçage est moins efficace car les longueurs d'ondes du signal excitateur sont plus courtes que les longueurs d'onde mécanique.

## 5.2 Structures élançées dans un écoulement

### 5.2.1 Bruit créé par l'écoulement tourbillonnaire autour d'un cylindre

En champ lointain  $R \gg \lambda$ , si  $D \ll \lambda$ , le champ acoustique rayonnée par un cylindre de longueur  $L$ , de diamètre  $D \ll L$ , de section droite  $A$ , placé dans un écoulement uniforme de vitesse  $U$  (voir figure 5.2) est, lorsque celui-ci qui ne vibre pas, uniquement dé aux fluctuations de pression tourbillonnaires de la forme

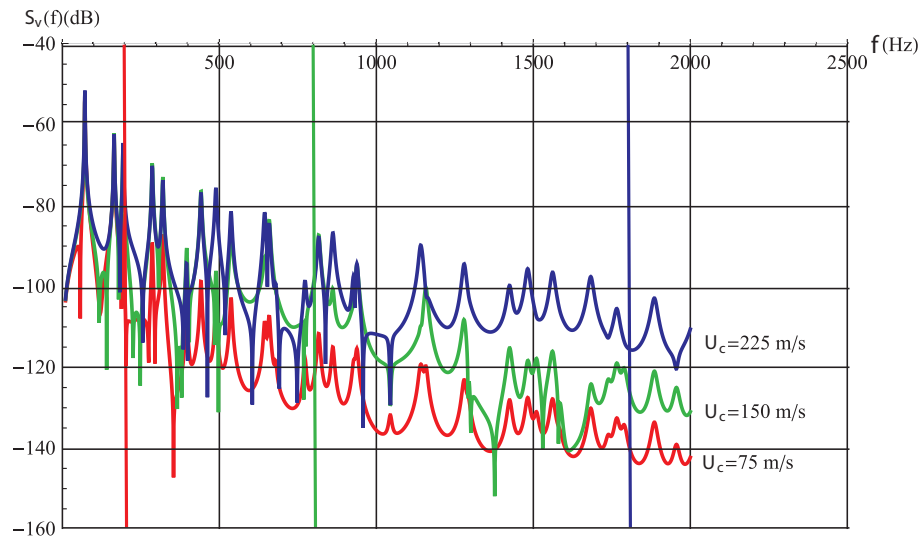


FIGURE 5.1 – Exemple de densités spectrales moyennes de déplacement d’une plaque excitée par un écoulement turbulent

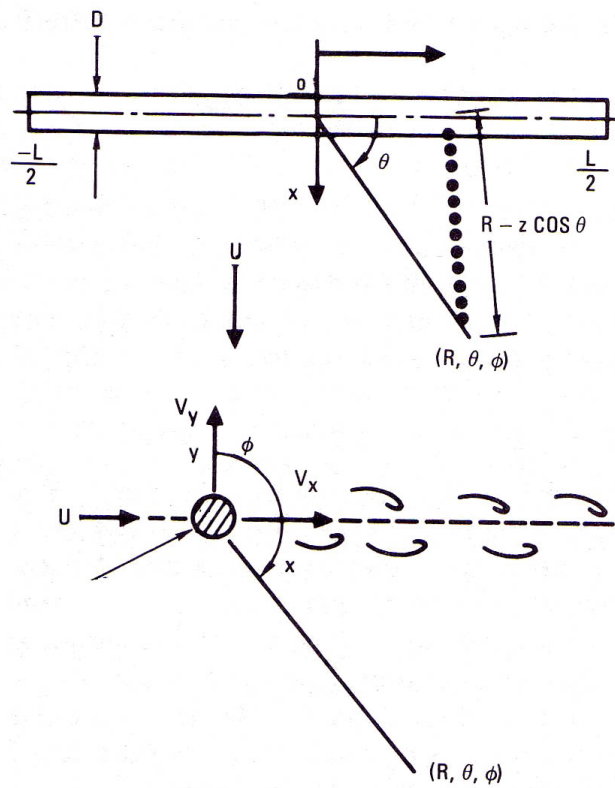


FIGURE 5.2 – Géométrie de l’écoulement tourbillonnaire autour d’un cylindre



$$p(r, \theta, \phi) = -\frac{\sin \theta \cos \phi \sin \eta}{4Rc_0} \frac{\rho_0 U^3 L C_p S \cos(\omega(t - R/c_0))}{\eta} - \frac{\sin \theta \sin \phi \sin 2\eta}{4Rc_0} \frac{\rho_0 U^3 L C_t S \cos(2\omega(t - R/c_0) + \beta)}{2\eta}$$

avec  $\eta = \pi L/\lambda \cos \theta$ ,  $C_p$  : coefficient de portance oscillante,  $C_t \approx 0,1C_p$  : coefficient de traînée oscillante,  $\omega = 2\pi S U/D$  où  $S$  est le nombre de Strouhal qui pour un cylindre rugueux varie peu  $0,1 < S < 0,25$  pour  $50 < Re < 10^7$ , avec une valeur moyenne  $S \approx 0,21$ . Si la longueur du cylindre  $L \ll \lambda$ , celui-ci se comporte comme un dipôle ponctuel. La puissance rayonnée (en négligeant la pression rayonnée par la traînée et en champ lointain)  $W = \pi \rho_0 U^6 L^2 C_l^2 S^2 / 14 c^3$ . En comparaison, la perte d'énergie par traînée est  $W_t = 1/2 \rho_0 U^3 D C_t L$ . Le rapport des énergies dissipées par rayonnement et traînée est de l'ordre de  $M^3$ .

### 5.2.2 Ballottement

Toute structure de section non circulaire est susceptible de subir un effet de ballottement (câbles électriques chargés de glace, tabliers de ponts dans le vent, tours de refroidissement, piles de ponts dans le courant, ailes et aubes de turbines). Cet effet est causé par une variation des forces de portance et de traînée des sections non circulaires lors de mouvements de cette section qui produit une oscillation auto-entretenue.

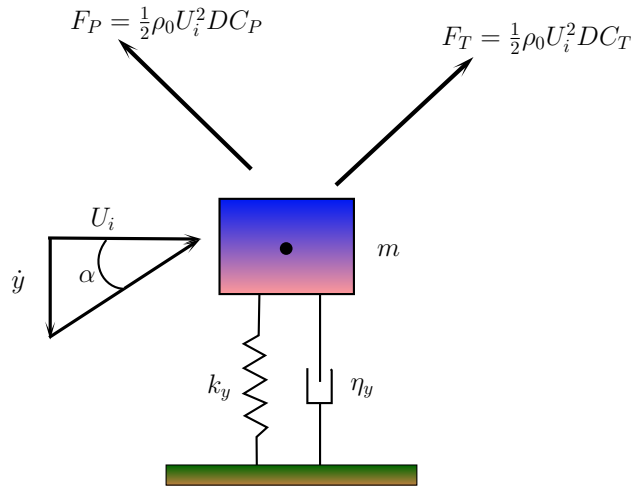


FIGURE 5.3 – Géométrie du ballottement

Pour simplifier l'analyse, on se place en régime établi pour lequel les forces induites par le mouvement du fluide sont uniquement dues à la vitesse instantanée. En particulier on suppose que le mouvement de la structure ne modifie pas l'écoulement. On s'intéresse à un modèle mécanique 1-D composé d'un système masse ( $m$ ) - ressort ( $k_y$ ) - amortisseur ( $c_y$ ) soumis à un écoulement uniforme constant de vitesse  $U$  d'un fluide de masse  $\rho_0$ .  $c_y$  est la constante de proportionnalité qui l'on écrit sous la forme  $c_y = 2m\zeta_y\omega_0$ , où  $\omega_0^2 = k_y/m$  est la fréquence propre du système masse-ressort et  $\zeta_y$  est le facteur d'amortissement avec  $\zeta_y = \eta_y/2$  si  $\eta_y \ll 1$  le facteur de perte. On a fixé ici  $\eta_y = 0,05$ .

Les forces qui agissent sur ce système sont les forces par unité de longueur de portance  $F_P = \frac{1}{2}\rho_0 U_i^2 D C_P$  et de traînée  $F_T = \frac{1}{2}\rho_0 U_i^2 D C_T$ , où  $D$  représente une longueur caractéristique du corps. La stabilité de ce modèle est étudiée en développant un modèle quasi statique des forces aérodynamiques et en cherchant sa réponse autour de l'équilibre. Lors d'un déplacement, l'angle d'incidence du fluide est  $\alpha = \arctan(\dot{y}/U)$ , où  $\dot{y}$  est la vitesse verticale. On compte le déplacement positif vers le bas en accord avec les conventions en usage en aéronautique.  $U_i^2 = U^2 + \dot{y}^2$  est la vitesse incidente

résultante. La force verticale  $F_y$  qui agit sur le corps est bien évidemment la résultante des forces de traînée et de portance  $F_y = -F_P \cos \alpha - F_T \sin \alpha = 1/2 \rho_0 U^2 D C_y$ , où le coefficient de force verticale  $C_y = -U_i^2/U^2 (C_P \cos \alpha + C_T \sin \alpha)$  dépend de la forme du corps, de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds.

Pour les faibles angles d'incidence,  $\alpha$ ,  $U_i$  et  $C_y$  peuvent être développés en série de Taylor :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ U_i^2 &= U^2 + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ C_y(\alpha) &= C_y(\alpha)|_{\alpha=0} + \left[ \frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= -C_P(\alpha)|_{\alpha=0} - \left[ \frac{\partial C_P(\alpha)}{\partial \alpha} + C_T \right]_{\alpha=0} \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ &= -C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + \left[ \frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2),\end{aligned}$$

car  $U_i^2/U^2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2)$  et  $\partial(C_P(\alpha) \cos \alpha + C_T(\alpha) \sin \alpha)/\partial \alpha = \partial C_P(\alpha)/\partial \alpha \cos \alpha + C_P(\alpha) \sin \alpha + \partial C_T(\alpha)/\partial \alpha \sin \alpha + C_T(\alpha) \cos \alpha$  avec  $(C_P(\alpha) \cos \alpha + C_T(\alpha) \sin \alpha)|_{\alpha=0} = C_P(\alpha)|_{\alpha=0}$ .

L'équation du mouvement du système masse-ressort amortisseur soumis à la force verticale est donnée par :

$$\begin{aligned}m\ddot{y} + 2m\zeta_y\omega_0\dot{y} + k_y y &= F_y = \frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_y \\ &= -\frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\rho_0 U^2 D \left[ \frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \frac{\dot{y}}{U} + \mathcal{O}(\alpha^2).\end{aligned}$$

On élimine dans cette équation les termes d'ordre supérieur à un en  $\alpha$  et on obtient :

$$m\ddot{y} + 2m\omega_0 \left( \zeta_y - \frac{\rho_0 U D}{4m\omega_0} \left[ \frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \right) \dot{y} + k_y y = -\frac{1}{2}\rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0}.$$

Le terme  $\zeta_T = \zeta_y - \rho_0 U^2 D / (4m\omega_0) [\partial C_y(\alpha)/\partial \alpha]_{\alpha=0}$  caractérise l'amortissement du mouvement et peut, sous certaines conditions, conduire à un mouvement instable. Il est en effet trivial de montrer que le mouvement résultant, qui est la somme d'un terme constant et d'une oscillation amortie, s'écrit :

$$y = \frac{1}{2k_y} \rho_0 U^2 D C_P(\alpha)|_{\alpha=0} + A_y e^{-\zeta_T \omega_0 t} \sin \left[ \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_T^2} t + \phi_y \right].$$

Il est évident que si  $\zeta_T$  est négatif, l'amplitude du mouvement augmente au cours du temps. Inversement si  $\zeta_T$  est positif, le mouvement décroît au cours du temps et le mouvement est stable. Si  $\zeta_y = 0$ , le mouvement sera stable pour :

$$\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} < 0 \text{ ou } \frac{\partial C_P(\alpha)}{\partial \alpha} + C_T > 0.$$

Toute section non circulaire possède un domaine d'angles d'incidences  $\alpha$  pour lequel  $\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha} > 0$ . L'instabilité apparaît lorsque  $\zeta_T = 0$  soit encore pour une vitesse critique  $U_c$  telle que :

$$U_c = \frac{4m\zeta_y\omega_0}{\rho_0 D} \frac{1}{\frac{\partial C_y(\alpha)}{\partial \alpha}}.$$

Par exemple, pour une section carrée, on a  $\partial C_y(\alpha)/\partial \alpha \approx 3$  (instable) pour  $Re = 10^5$ . Pour un profil NACA ou un profil plat à fort allongement, on a  $\partial C_y(\alpha)/\partial \alpha \approx -6$  (stable) pour  $Re > 10^3$ . Pour une section rectangulaire de hauteur  $D$  et de longueur  $2/3D$ , on a  $\partial C_y(\alpha)/\partial \alpha \leq 0$  (partiellement stable) et pour une section rectangulaire de hauteur  $2/3D$  et de longueur  $D$ , on a  $\partial C_y(\alpha)/\partial \alpha > 0$  (instable).

### 5.3 Instabilité convective

Un autre effet de ballotement existe lorsqu'une structure élastique est en contact avec un écoulement. Cet effet n'est pas lié à une variation des efforts aérodynamiques ou à une excitation par une couche limite turbulente mais est lié à une instabilité qui prend naissance dans la structure sous l'effet de l'écoulement. Cette instabilité résulte d'un échange d'énergie entre l'écoulement et la structure élastique. Cet effet est responsable du fouettement d'un tuyau d'arrosage, du claquement des drapeaux dans le vent ou du galop des ailes. L'essentiel du phénomène (l'échange d'énergie entre l'écoulement et la vibration de la structure) peut être décrit pour une géométrie simple en présence d'écoulement potentiel (incompressible). On va chercher à mettre en évidence l'apparition d'ondes de paroi "convectivement" instables (l'écoulement transporte les ondes vers l'aval et localement la réponse du système finit par décroître) et absolument instables (les ondes envahissent tout le domaine et l'amplitude de la structure ne fait que croître).

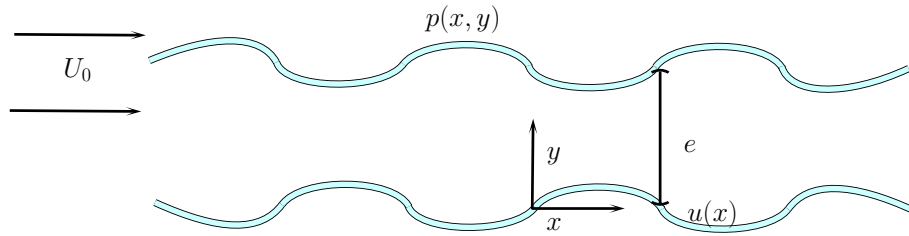


FIGURE 5.4 – Géométrie du couplage aéroélastique

Pour fixer les idées, on peut considérer les deux exemples élémentaires (mais non triviaux!) de la plaque infinie, dans laquelle on introduit une tension de membrane, dans un écoulement et celui du canal à parois élastiques qui contient un fluide en écoulement. Les équations du modèle, avec  $D$  rigidité de flexion et  $T$  tension de membrane, sont :

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= p(x, y = 0, t) \{ +p(x, y = e, t) \text{ pour le canal} \}, \\ \Delta \phi(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial \phi(x, y = 0, t)}{\partial y} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \\ \text{et } \frac{\partial \phi(x, y = e, t)}{\partial y} &= \pm \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \text{ pour le canal.} \end{aligned}$$

Le signe  $\pm$  doit être choisi en fonction du type de mouvement de paroi que l'on considère (onde sinusoïdale ou variqueuse). À ces équations se rajoute la conservation de l'énergie sur  $\phi(x, y, t)$ . Le potentiel  $\phi(x, y, t)$  est relié à la pression dans le fluide par  $p(x, y, t) = -\rho_0 (\partial \phi(x, y, t) / \partial t + U_0 \partial \phi(x, y, t) / \partial x)$ .

On considère dans un premier temps uniquement la plaque seule en contact avec l'écoulement. On s'intéresse aux ondes qui se propagent dans la structure sous la forme  $u(x, t) = \exp(\imath k x) \exp(-\imath \omega t)$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ . La condition de continuité des déplacements normaux à la paroi nous donne donc pour le potentiel :

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y = 0, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = (-\imath \omega + U_0 \imath k) e^{\imath k x} e^{-\imath \omega t}.$$

Soit donc  $\phi(x, y, t) = (-\imath \omega + U_0 \imath k) / \gamma \exp(\imath k x + \gamma y) \exp(-\imath \omega t)$ , l'équation du potentiel  $\Delta \phi(x, y, t) = 0$  donne  $(-k^2 + \gamma^2) e^{\imath k x + \gamma y} \exp(-\imath \omega t) = 0$ . Soit  $\gamma = |k|$ . De là, on en déduit que :

$$p(x, y = 0, t) = -\rho_0 \left( \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{(\omega - U_0 k)^2}{|k|} e^{\imath k x} e^{-\imath \omega t},$$

La relation de dispersion de la plaque tendue couplée est alors  $\mathcal{D}(\omega, k) = Dk^4 + Tk^2 - m\omega^2 - \rho_0(\omega - U_0k)^2/|k| = 0$ . On peut écrire cette relation de dispersion sous la forme plus générale  $K(k) - \omega^2 M(k) - C(k)(\omega - U_0k)^2 = 0$ , où  $K(k)$  traduit un effet d'élasticité mécanique,  $M(k)$  traduit l'effet de masse mécanique et  $C(k)$  traduit les effets de masse et de rigidité apportés par le fluide. On résout la relation de dispersion pour  $\omega$  et on obtient simplement :

$$\omega^\pm = \frac{U_0kC(k) \pm \sqrt{K(k)(M(k) + C(k)) - U_0^2k^2M(k)C(k)}}{M(k) + C(k)}.$$

La condition pour que le système soit stable est que la partie imaginaire de  $\omega$  soit négative. Soit encore  $K(k)(M(k) + C(k)) - U_0^2k^2M(k)C(k) < 0$ . Pour un nombre d'onde  $k$  réel, la vitesse d'écoulement à partir de laquelle l'instabilité apparaît est donc telle que :

$$U_c = \min_{k \in \mathbb{R}} \left( \frac{K(k)(M(k) + C(k))}{k^2M(k)C(k)} \right)^{1/2}.$$

Pour un écoulement de vitesse inférieure à  $U_c$ , le système reste stable. Pour caractériser l'instabilité, on peut étudier la réponse impulsionnelle  $G(x, t)$  du système. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} |G(0, t)| \rightarrow 0$  on parle d'instabilité convective et si  $\lim_{t \rightarrow \infty} |G(0, t)| \rightarrow \infty$  on parle d'instabilité absolue. En pratique on peut étudier la nature de l'instabilité sans regarder le comportement de la réponse impulsionnelle, pour cela, on s'intéresse à la fréquence  $\omega_0$  et au nombre d'onde  $k_0$ , implicitement définis par :

$$\mathcal{D}(\omega_0, k_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k}(\omega_0, k_0) = 0.$$

La nature absolue ou convective de l'instabilité est dictée par le signe de la partie imaginaire  $\Im(\omega_0)$ . Elle est absolue si  $\Im(\omega_0) > 0$  et convective si  $\Im(\omega_0) < 0$ . On cherche à savoir à quel moment l'instabilité change de nature. La vitesse à partir de laquelle l'instabilité convective devient absolument instable est nommée vitesse de transition  $U_T$ , on peut montrer (cela est difficile!) que celle-ci apparaît comme la racine triple de la relation de dispersion :

$$\mathcal{D}(\omega_T, k_T, U_T) = 0, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k}(\omega_T, k_T, U_T) \text{ et } \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial k^2}(\omega_T, k_T, U_T) = 0,$$

toujours pour  $k_T$  réel.

Pour le cas de la plaque sans tension, on a la relation de dispersion  $\tilde{k}^4 - \tilde{\omega}^2 - (\tilde{\omega} - \tilde{U}\tilde{k})^2/|\tilde{k}| = 0$ , avec  $\tilde{k} = km/\rho_0$ ,  $\tilde{\omega} = \omega m^{5/2}/\rho_0^2 D^{1/2}$  et  $\tilde{U} = Um^{3/2}/(\rho_0 D^{1/2})$ . L'instabilité convective apparaît pour :

$$\tilde{U}_C = \min_{\tilde{k} \in \mathbb{R}} \left( \frac{\tilde{k}^4 \left(1 + \frac{1}{|\tilde{k}|}\right)}{k^2 \left(\frac{1}{|\tilde{k}|}\right)} \right)^{1/2} = \min_{\tilde{k} \in \mathbb{R}} \left( \tilde{k}^2 \left(|\tilde{k}| + 1\right) \right)^{1/2},$$

soit  $\tilde{U}_C = 0$  : une plaque couplée à un écoulement présente toujours une instabilité convective du fait de sa nature dispersive (quelle que soit la fréquence, il y a toujours une onde qui se propage à une vitesse de phase non nulle).

On montre que la transition à l'instabilité absolue apparaît pour une vitesse d'écoulement de :

$$\tilde{U}_T = \frac{2^{1/2}5^{5/4}}{3^{3/4}} \left( 2 - \frac{\sqrt{15}}{2} \right)^{3/2} \approx 0,074.$$

Ce qui en unité physique pour une plaque en acier de 1 cm d'épaisseur dans l'eau correspond à  $U_0 \approx 0,074 \times \rho_0 \sqrt{D}/m^{3/2} \approx 14m/s$  soit environ 27 nœuds qui est une valeur couramment atteinte

par les navires. En général, les coques sont plus épaisses que 1 cm ce qui décale la transition vers les hautes vitesses.

Pour la membrane tendue sans rigidité, on a la relation de dispersion  $\tilde{k}^2 - \tilde{\omega}^2 - (\tilde{\omega} - \tilde{U}\tilde{k})^2/|\tilde{k}| = 0$ , avec  $\tilde{k} = km/\rho_0$ ,  $\tilde{\omega} = \omega m^{3/2}/\rho_0 T^{1/2}$  et  $\tilde{U} = Um^{1/2}/T^{1/2}$ . L'instabilité convective apparaît pour :

$$\tilde{U}_C = \min_{\tilde{k} \in \mathbb{R}} \left( \frac{\tilde{k}^2 \left(1 + \frac{1}{|\tilde{k}|}\right)}{k^2 \left(\frac{1}{|k|}\right)} \right)^{1/2} = \min_{\tilde{k} \in \mathbb{R}} \left( |\tilde{k}| + 1 \right)^{1/2},$$

soit  $\tilde{U}_C = 1$  : une membrane couplée à un écoulement ne présente une instabilité convective que lorsque la vitesse d'écoulement dépasse la vitesse de propagation des ondes dans la membrane ( $c_t^2 = T/m$ ).

On montre que la transition à l'instabilité absolue apparaît pour une vitesse d'écoulement de :

$$\tilde{U}_T = \left(6\sqrt{3} - 9\right)^{1/2} \approx 1,18.$$

Le seuil d'instabilité absolue est proche de la vitesse de propagation des ondes dans la membrane. Ce qui explique pourquoi les voiles de bateau lorsqu'elles ne sont pas bordées (ou les drapeaux faiblement tendus) claquent dans le vent et que la moindre tension de la voile ou du drapeau fait cesser les oscillations du tissu et les claquements.

## 5.4 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Les résultats précédents peuvent servir à interpréter l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui apparaît à l'interface entre deux fluides séparés par une surface infiniment mince qui possède une tension surfacique qui correspond à une membrane sans masse au contact de deux fluides. La relation de dispersion de la surface de séparation, dont la géométrie est présentée figure 5.5, considérée comme une membrane de masse  $m$  est simplement la relation de dispersion de la membrane tendue sans rigidité dans laquelle on tient compte du fluide au repos. On a ainsi :

$$Tk^2 - \left(m + \rho_1 \frac{1}{|k|}\right) \omega^2 - \rho_0 \frac{(\omega - U_0 k)^2}{|k|} = 0.$$

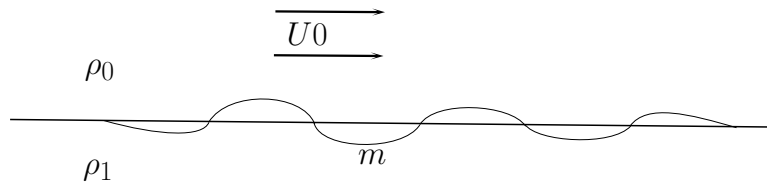


FIGURE 5.5 – Interface entre un milieu en mouvement et un milieu au repos séparés par une membrane de masse  $m$

Bien évidemment le cas  $m = 0$  modélise l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. On adimensionnalise cette équation par rapport aux grandeurs liées au fluide en mouvement de masse volumique  $\rho_0$ . On a :

$$\hat{k}^2 - \left(1 + \frac{\chi}{|\hat{k}|}\right) \hat{\omega}^2 - \frac{(\hat{\omega} - \hat{U}\hat{k})^2}{|\hat{k}|} = 0,$$

où  $\chi = \rho_1/\rho_0$ . La vitesse critique est :

$$\hat{U}_C = \min_{\hat{k} \in \mathbb{R}} \left( \frac{\hat{k}^2 + \hat{k}(1 + \chi)}{\hat{k} + \chi} \right)^{1/2}.$$



FIGURE 5.6 – Instabilités à l’interface de couches nuageuses

$\hat{U}_C$  varie brutalement de  $\hat{U}_C = 1$  pour  $\chi = 0$ , qui correspond à l’écoulement au-dessus d’une membrane flexible, à  $\hat{U}_C = 0$  dès que le domaine au repos est pris en compte (ie  $\chi > 0$ ). On peut montrer que dès que  $\chi > 1/3$ , l’instabilité est toujours absolue. En pratique, cette instabilité peut expliquer la formation d’ondes à l’interface de deux fluides en mouvement relatif l’un par rapport à l’autre comme les vagues à la surface de la mer (en partie...) ou les oscillations de nuages observées à l’interface de couches atmosphériques.

## Chapitre 6

# Introduction à la théorie des fonctions de Bessel

Dans toute la suite,  $\nu$  est un nombre complexe quelconque dont la partie réelle est supposée positive.  $n$  est un entier positif ou nul.

### 6.1 Définitions. Premières propriétés

Nous appelons équation de Bessel d'indice  $\nu$ , l'équation suivante pour  $z$  complexe quelconque :

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel de première espèce  $J_{\pm\nu}(z)$ , de deuxième espèce  $Y_{\pm\nu}(z)$  (parfois nommées fonctions Neumann et notées  $N_{\pm\nu}(z)$ ) et fonctions de Bessel de troisième espèce, nommées fonctions de Hankel de première espèce  $H_{\pm\nu}^1(z)$  et de deuxième espèce  $H_{\pm\nu}^2(z)$ .

L'équation de Bessel comporte un point singulier régulier à l'origine. La théorie de Fuch dit qu'une équation différentielle d'ordre 2 qui a un point singulier régulier  $z_0$  possède deux solutions linéairement indépendantes sous la forme :

$$\begin{aligned}y(z) &= (z - z_0)^\lambda A(z) \\y(z) &= (z - z_0)^\gamma B(z) \ln(z - z_0) + C(z)(z - z_0)^\lambda\end{aligned}$$

où  $\lambda$  et  $\gamma$  sont nommés exposants indiciels,  $A(z)$ ,  $B(z)$  et  $C(z)$  sont des fonctions analytiques au voisinage de  $z_0$

Cherchons la première solution de cette équation sous forme d'une série de Frobénius (généralisation des séries entières) au voisinage de  $z = 0$  :

$$y = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Si  $\lambda$  n'est pas un entier, cette série n'est pas entière. Toutefois, les résultats de convergence et de dérivabilité s'étendent à ces séries. Dérivons donc :

$$\begin{aligned}y' &= a_0 \lambda z^{\lambda-1} + a_1(\lambda+1)z^\lambda + \dots + a_n(\lambda+n)z^{\lambda+n-1} + \dots \\y'' &= a_0 \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2} + a_1(\lambda+1)\lambda z^{\lambda-1} + \dots + a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)z^{\lambda+n-2} + \dots\end{aligned}$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation initiale et regroupons les coefficients des puissances de  $z$  :

$$\begin{aligned}
0 &= (a_0\lambda(\lambda-1) + a_0\lambda - a_0\nu^2) z^{\lambda-2} \\
&+ (a_1(\lambda+1)\lambda + a_0(\lambda+1) - a_1\nu^2) z^{\lambda-1} \\
&+ (a_2(\lambda+2)(\lambda+1) + a_2(\lambda+2) - a_2\nu^2 + a_0) z^\lambda \\
&+ \dots \\
&+ (a_n(\lambda+n)(\lambda+n-1) + a_n(\lambda+n) - a_n\nu^2 + a_{n-2}) z^{\lambda+n-1} \\
&+ \dots,
\end{aligned}$$

sous une forme plus condensée, ceci s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\lambda)^2 - \nu^2] a_k z^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+\lambda+2} = 0.$$

D'où, bien évidemment :

$$\begin{aligned}
a_0(\lambda^2 - \nu^2) &= 0 \\
a_1((\lambda+1)^2 - \nu^2) &= 0 \\
a_2((\lambda+2)^2 - \nu^2) + a_0 &= 0 \\
&\dots \\
a_n((\lambda+n)^2 - \nu^2) + a_{n-2} &= 0 \\
&+ \dots.
\end{aligned}$$

Les relations précédentes ne font intervenir les coefficients que de deux en deux. Il est loisible de supposer  $a_0 \neq 0$ , sinon le premier terme non nul sera  $a_0$ . Il est donc évident que  $\lambda = \pm\nu$ . Cherchons en premier lieu la solution qui correspond à  $\lambda = +\nu$  :

$$\begin{aligned}
a_1(2\nu+1) &= 0 \\
a_n(n+2\nu)n + a_{n-2} &= 0, n \geq 2,
\end{aligned}$$

mais, par hypothèse,  $\Re(\nu) \geq 0$  donc  $a_1 = 0$ . Donc, tous les coefficients d'indice impair sont nuls. Il est à remarquer que  $\Re(\nu) > -1/2$  conduit au même résultat. Les coefficients d'indice pair s'écrivent :

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-a_0}{2^2(\nu+1)} \\
a_4 &= \frac{-a_2}{4^2(\nu+2)} \\
&\dots \\
a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{(2n)^2(\nu+n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(-1)^n a_0}{n!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)}.
\end{aligned}$$

Choisissons  $a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu+1))$  ce qui conduit à :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

Où  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ,  $\Re(z) > 0$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$

Finalement la série, solution de l'équation de Bessel s'écrit :

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}.$$



Il est évident que cette série converge uniformément sur tout intervalle borné. Si  $\lambda = -\nu$ , lorsque  $\nu$  n'est pas entier, nous obtenons de même :

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n - \nu + 1)}.$$

Si  $\nu$  est un entier  $p \geq 1$ , les pôles de la fonction  $\Gamma(z)$  sont les entiers négatifs, alors :

$$J_{-p}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n - p + 1)},$$

or avec  $n - p = k$ ,

$$J_{-p}(z) = (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k+p)! \Gamma(k+1)} = (-1)^p J_p(z).$$

Si  $\nu$  n'est pas un entier positif ou nul, les fonctions  $J_\nu(z)$  et  $J_{-\nu}(z)$  sont linéairement indépendantes. À l'origine, la première se comporte comme  $z^\nu$  et la seconde comme  $z^{-\nu}$ . La solution générale de l'équation de Bessel est une combinaison linéaire des deux solutions :  $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Si  $\nu$  est un entier positif ou nul, les deux solutions sont linéairement dépendantes. Il faut donc chercher une autre solution indépendante de l'équation de Bessel. La fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $\nu$  est la fonction suivante :

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu},$$

elle est définie pour  $\nu$  non entier. Cette fonction est une solution de l'équation de Bessel d'indice  $\nu$  et elle forme avec  $J_\nu(z)$  un couple de solutions linéairement indépendantes. Pour  $\nu$  entier, la formule ci-dessus conduit à une indétermination de la forme  $\frac{0}{0}$ . Par la règle de l'Hospital,

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}}{(-1)^n \pi}$$

ou encore

$$Y_n(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(-1)^n J_{-n+\epsilon}(z) - J_{n-\epsilon}(z)}{\epsilon}.$$

Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} Y_{-n}(z) &= (-1)^n Y_n(z) \\ Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2q} \frac{(n-q-1)!}{q!} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left(\frac{z}{2}\right)^{2q}}{q!(n+q)!} (2\gamma - \Psi(q) - \Psi(n+q)) \end{aligned}$$

avec  $\Psi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^{-1}$ .  $\gamma = 0,577215\dots$  est la constante d'Euler. Elle est définie par :  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(n) - \ln n]$ . Certains auteurs définissent différemment cette fonction :  $\Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=0}^{n-1} k^{-1}$ ,  $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ .

Les fonctions  $J_n(z)$  et  $Y_n(z)$  forment un couple de solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel. Un autre couple de solutions indépendantes important est formé par les fonctions de

Hankel de première et de seconde espèce :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) &= \mathbf{J}_\nu(z) + i\mathbf{Y}_\nu(z) \\ \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) &= \mathbf{J}_\nu(z) - i\mathbf{Y}_\nu(z) \\ \mathbf{H}_{-\nu}^{(1)}(z) &= e^{\nu\pi i}\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) \\ \mathbf{H}_{-\nu}^{(2)}(z) &= e^{-\nu\pi i}\mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) \end{aligned}$$

Notons l'analogie avec les formules d'Euler qui lient les fonctions trigonométriques et exponentielles.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\nu(z) &= \frac{\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) + \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z)}{2} \\ \mathbf{Y}_\nu(z) &= \frac{\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) - \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z)}{2i} \end{aligned}$$

## 6.2 Comportements asymptotiques

Tous les résultats qui suivent sont donnés sans démonstration. Il est nécessaire de se reporter à des ouvrages plus complets pour plus de détails.

◇ Indice  $\nu$  fixé.

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0 \quad \bullet \quad \mathbf{J}_\nu(z) &\sim \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \nu \neq -1, -2, -3, \dots \\ \bullet \quad \mathbf{Y}_0(z) &\sim -i\mathbf{H}_0^{(1)}(z) \sim i\mathbf{H}_0^{(2)}(z) \sim \frac{2}{\pi} \ln(z) \\ \bullet \quad \mathbf{Y}_\nu(z) &\sim -i\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) \sim i\mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow \infty \quad \bullet \quad \mathbf{J}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), -\pi < \arg(z) < \pi \\ \bullet \quad \mathbf{Y}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), -\pi < \arg(z) < \pi \\ \bullet \quad \mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, -\pi < \arg(z) < 2\pi \\ \bullet \quad \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, -2\pi < \arg(z) < \pi \end{aligned}$$

◇ Argument  $z$  fixé.

$$\begin{aligned} \Re(\nu) \rightarrow \infty \quad \bullet \quad \mathbf{J}_\nu(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ez}{2\nu}\right)^\nu \\ \bullet \quad \mathbf{Y}_\nu(z) &\sim \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{-\nu} \end{aligned}$$

### 6.3 Équations différentielles

- $y'' + \frac{y'}{z} + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0 \Rightarrow y = J_\nu(bz)$
- $y'' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{z^2}\right) y = 0 \Rightarrow y = \sqrt{z} J_\nu(\lambda z)$
- $y'' + \left(\frac{\lambda^2}{4z} - \frac{\nu^2 - 1}{4z^2}\right) y = 0 \Rightarrow y = \sqrt{z} J_\nu(\lambda\sqrt{z})$
- $y'' + \frac{2\nu - 1}{z} y' + \lambda^2 y = 0 \Rightarrow y = z^\nu J_\nu(\lambda z)$
- $y'' + (\lambda^2 e^{2z} - \nu^2) y = 0 \Rightarrow y = J_\nu(\lambda e^z)$
- $y^{(2n)} - (-1)^n \lambda^{2n} z^{-n} y = 0 \Rightarrow y = z^{\frac{n}{2}} J_\nu(2\lambda\alpha\sqrt{z}), \alpha$  racine n-ième de l'unité
- $y'' + \frac{2}{z} y' + \left(1 - \frac{n(n+1)}{z^2}\right) y = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = j_n(z), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$j_n(z)$  est la fonction de Bessel sphérique de première espèce. Elle joue un rôle particulier en Acoustique de même que les autres fonctions de Bessel sphériques :

$$\begin{aligned} y_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \\ h_n^{(1,2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z) \\ j_0(z) &= \frac{\sin z}{z} \\ y_0(z) &= -\frac{\cos z}{z} \\ j_1(z) &= \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \\ y_1(z) &= -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z}. \end{aligned}$$

Voyons une application au calcul numérique des ces relations différentielles. Soit à calculer  $\int_a^{+\infty} u_n(x) dx$ , où  $u_n(x)$  est une fonction de Bessel quelconque. Du fait du comportement asymptotique de ces fonctions, cette intégrale est numériquement difficile à estimer. Partons de l'équation différentielle de Bessel :

$$u_n''(z) + \frac{1}{z} u_n'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) u_n(z) = 0$$

et intégrons cette expression entre les bornes  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n''(z) dz + \int_a^b \frac{u_n'(z)}{z} dz + \int_a^b u_n(z) dz - n^2 \int_a^b \frac{u_n(z)}{z^2} dz &= 0 \\ u_n'(b) - u_n'(a) + \frac{u_n(b)}{b} - \frac{u_n(a)}{a} + \int_a^b \frac{u_n(z)}{z^2} dz + \int_a^b u_n(z) dz - n^2 \int_a^b \frac{u_n(z)}{z^2} dz &= 0 \\ u_n'(a) - u_n'(b) + \frac{u_n(a)}{a} - \frac{u_n(b)}{b} - \int_a^b (1 - n^2) \frac{u_n(z)}{z^2} dz &= \int_a^b u_n(z) dz \end{aligned}$$

Si, par exemple, nous prenons  $a \neq 0, b = \infty$ , nous obtenons :

$$\int_a^\infty u_n(z) dz = u_n'(a) + \frac{u_n(a)}{a} - \int_a^\infty (1 - n^2) \frac{u_n(z)}{z^2} dz.$$

Dans la relation précédente, l'intégrale du second membre converge numériquement plus vite puisque l'argument se comporte à l'infini comme  $z^{-3/2}$  au lieu de  $z^{-1/2}$ . Bien entendu, nous pouvons réitérer ce calcul et obtenir

$$\int_a^\infty u_n(z) dz = u'_n(a) + \frac{u_n(a)}{a} - \frac{u'_n(a)}{a^2} - 3 \frac{u_n(a)}{a^3} + \int_a^\infty (9 - n^2) \frac{u_n(z)}{z^4} dz.$$

## 6.4 Formules de récurrence

Tous les résultats qui suivent sont donnés pour une fonction de Bessel quelconque, notée  $u_\nu(z)$ .

- $-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{-\nu} u_\nu(z)) = z^{-(\nu+1)} u_{\nu+1}(z)$
- $u'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} u_\nu(z) - u_{\nu+1}(z)$
- $2u'_\nu(z) = u_{\nu-1}(z) - u_{\nu+1}(z)$
- $\frac{2\nu}{z} u_\nu(z) = u_{\nu-1}(z) + u_{\nu+1}(z).$

soit  $\nu = 0$ , il vient  $2u'_0(z) = u_{-1}(z) - u_1(z) = -2u_1(z)$ , donc  $u'_0(z) = -u_1(z)$ ,

La relation de récurrence des fonctions de Bessel sphériques  $f_n(z)$  est donnée par :  $\frac{2(n+1)}{z} f_n(z) = f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z)$ .

### 6.4.1 Relations d'orthogonalité des fonctions $J_\nu(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_\nu(\alpha_m t) J_\nu(\alpha_n t) t dt &= 0, (m \neq n, \nu > -1) \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\alpha_m)]^2, (m = n, b = 0, \nu > -1) \\ &= \frac{1}{2\alpha_n^2} \left[ \frac{a^2}{b^2} + \alpha_n^2 - \nu^2 \right] [J'_\nu(\alpha_m)]^2, (m = n, b \neq 0, \nu \geq -1), \end{aligned}$$

si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  sont les zéros positifs de  $aJ_\nu(x) + xbJ'_\nu(x) = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

## 6.5 Fonctions de Bessel modifiées

Nous appelons équation de Bessel modifiée d'indice  $\nu$ , l'équation suivante pour  $z$  complexe quelconque :

$$y'' + \frac{1}{z} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel modifiées de première espèce  $I_{\pm\nu}(z)$  et de deuxième espèce  $K_\nu(z)$  parfois nommées fonctions de Kelvin. La relation entre ces deux solutions est

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu},$$

Lorsque  $\nu$  est un entier, cette expression doit être comprise comme un passage à la limite. Nous avons dans ce cas les relations

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \text{ et } K_\nu(x) = \frac{i\pi}{2} i^n H_n(ix).$$

Les fonctions  $I_n(x)$  et  $K_\nu(x)$  sont réelles pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Leurs comportements asymptotiques sont les suivants

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 & \bullet I_n(x) \sim \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}, \nu \neq -1, -2, -3, \dots \\ & \bullet K_0(x) \sim -\ln(x), K_n(x) \sim \frac{\Gamma(n)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \\ x \rightarrow \infty & \bullet I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \\ & \bullet K_n(z) \sim \frac{\pi}{\sqrt{2x}} e^{-x}. \end{aligned}$$

Remarquons l'analogie entre les fonctions de Bessel "normales" (comportement sinusoidal) et modifiées (comportement exponentiel) avec les fonctions exponentielles imaginaires et réelles.

## 6.6 Représentations intégrales

Soit la fonction  $\phi(x)$ , définie par l'intégrale convergente

$$\phi(x) = \int_1^{\iota\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Cette fonction est deux fois dérivable :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \int_1^{\iota\infty} it \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_1^{\iota\infty} d(-it\sqrt{1-t^2}) e^{ixt} \\ &= \left[-it\sqrt{1-t^2} e^{ixt}\right]_1^{\iota\infty} - x \int_1^{\iota\infty} \sqrt{1-t^2} e^{ixt} dt \\ &= -x \int_1^{\iota\infty} \sqrt{1-t^2} e^{ixt} dt \\ \phi''(x) &= - \int_1^{\iota\infty} \frac{t^2 e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Donc, il est évident que :

$$\phi''(x) + \frac{1}{z} \phi'(x) + \phi(x) = 0.$$

$\phi(x)$  est solution de l'équation de Bessel d'ordre zéro. De même,

$$\int_1^{\iota\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda e^{ixt} (t^2 - 1)^{(\lambda - \frac{1}{2})} dt$$

est solution de l'équation de Bessel d'indice  $\lambda \geq 0$ . Avant de donner une expression précise de la fonction  $\phi(x)$  au moyen de fonctions de Bessel, il convient de choisir une détermination du radical. Choisissons, par exemple, d'aller de 1 à  $\iota\infty$  en suivant d'abord l'axe réel de 1 à 0 puis l'axe imaginaire de 0 à  $\infty$ .

$$\phi(x) = \int_1^0 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^{\iota\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Sur l'axe imaginaire, posons  $t = \iota u$  :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_1^0 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \iota \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1+u^2}} du \\ \phi(x) &= \int_1^0 \frac{\cos(xt) + \iota \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \iota \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1+u^2}} du. \end{aligned}$$

La partie réelle de  $\phi(x)$  est à elle seule solution de l'équation de Bessel, elle se réduit pour  $x = 0$  é

$$\phi(0) = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\pi}{2},$$

nous savons que  $Y_0$  est infinie à l'origine alors que  $J_0(0) = 1$ . Ainsi, il est évident que :

$$\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} J_0(x).$$

De même,

$$\int_1^0 \frac{\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt + i \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt = -\frac{\pi}{2} Y_0(x).$$

Ainsi :

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\pi}{2} H_0^1(x).$$

La représentation intégrale de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro peut se généraliser à un ordre quelconque et porte le nom de formule de Bessel :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin t - nt)} dt \\ I_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos nt dt \end{aligned}$$

Lorsque l'ordre n'est pas entier, nous avons :

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{itx} dt \\ &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{2\nu} \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Or  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , soit

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} d\theta.$$

Une autre application des représentations intégrales est donnée par le développement en série de Fourier de la fonction  $e^{ix \sin \theta}$  pour  $x$  réel positif

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(x) e^{in\theta} \\ \text{avec } a_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= J_n(x) \text{ (formule de Bessel)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) e^{in\theta},$$

en particulier si  $\theta = 0$ ,

$$1 = J_0(x) + \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p}(x).$$

# Bibliographie

- [1] ★ L. L. BERANEK, 1967. *Acoustics Measurements*. John Wiley & Sons.
- [2] ★★ L. M. BREKHOVSKIKH, O. A. GODIN, 1990. *Acoustics of Layered Media I : Plane and Quasi-Plane Wave, II : Point Sources And Bounded Beams*). Springer-Verlag.
- [3] ★★ M. BRUNEAU, 1983. *Introduction aux Théories de l'Acoustique*. Université du Maine Editeur.
- [4] ★★ D.G. CRIGHTON, A.P. DOWLING, J.E. FFWOCS WILLIAMS, M. HECKL, F.G. LEPPIGTON, 1992. *Modern Method in Analytical Acoustics*. Springer-Verlag.
- [5] ★★ F. FAHY, 1985. *Sound and Structural Vibration*. Academic Press.
- [6] ★ R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS, 1979. *Le cours de Physique de Feynman*, tomes 1 (Mécanique) et 2 (Electromagnétisme). InterEditions.
- [7] ★★ P. FILIPPI, A. BERGASSOLI, D. HABAULT, J.-P. LEFEBVRE, 1999. *Acoustics : Basic Physics Theory & Methods*. Academic Press.
- [8] ★ N.H. FLETCHER, T.D. ROSSING, 1991. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag.
- [9] ★ M. GERADIN, D. RIXEN, 1993. *Théorie des vibrations*. Masson.
- [10] ★★ M.C. JUNGER, D. FEIT, 1980. *Sound, Structure and their Vibration*. MIT Press, Second Edition.
- [11] ★ E. KREYSZIG, 1993. *Advanced Engineering Mathematics*. Seventh Edition. John Wiley & Sons.
- [12] ★ L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, 1989. *Physique Théorique, tome 6. Mécanique des Fluides*. Mir.
- [13] ★ L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, 1989. *Physique Théorique, tome 7. Théorie de l'Élasticité*. Mir.
- [14] ★ C. LESUEUR, 1988. *Rayonnement acoustique des structures*. Éditions Eyrolles.
- [15] ★★ A. E. H. LOVE, 1944. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications.
- [16] ★ P. M. MORSE, 1948. *Vibration and Sound*. McGraw-Hill Book Company.
- [17] ★★ P. M. MORSE, K. U. INGARD, 1968. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill Book Company.
- [18] ★★ A. H. NAYFEH, 1993. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley Classics Library.
- [19] ★★ A. D. PIERCE, 1981. *Acoustics. An Introduction to its Physical Principle and Applications*. McGraw-Hill Book Company.
- [20] ★ J.W.S. RAYLEIGH, 1945. *The Theory of Sound*. Dover Publications.
- [21] ★ L. SCHWARTZ, 1964. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann.





