Math. Meth. in the Appl. Sci. 6 (1984) 192–205 © 1984 B. G. Teubner Stuttgart

Évolution Quasi-Statique des Milieux Visco-Plastiques de Maxwell-Norton

M. Djaoua, Tunis, et P. Suquet, Montpellier

Communicated by J. C. Nedelec

In this paper, we deal with the existence and unicity of a solution of the Maxwell-Norton quasi-static problem. Some fundamental results concerning the functional spaces are first recalled. Then, by an implicit scheme, we obtain a discretized problem which is well-posed. By monotonicity techniques, we finally prove the convergence of the discrete solutions to the solution of the initial problem.

1 Milieux Dissipatifs de Norton

Un modèle couramment utilisé pour décrire le comportement des milieux élastiques viscoplastiques est celui de Maxwell-Norton dont une généralisation a été proposée par Friaa [1]. La loi de comportement des milieux étudiés ici est:

$$(1.1)\qquad \varepsilon_{ij}(v) = A_{ijkh}\frac{d\sigma_{kh}}{dt} + \lambda|\sigma^D|^{p-2}_{\mathbf{R}^9_s}\sigma^D_{ij}, \qquad \lambda > 0\,.$$

σ et v désignent le tenseur des contraintes et le champ de vitesses dans le corps; $A = (A_{ijkh})$ est tenseur de compliance élastique du matériau; $|.|_{\mathbf{R}^9_s}$ désigne la norme sur $\mathbf{R}^9_s$, espace des tenseurs 3×3 symétriques. De plus, les notations suivantes ont été utilisées:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \\ \mathrm{Tr}(\sigma) = \sigma_{ii}\,, \qquad \sigma^D_{ij} = \sigma_{ij} - \dfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(\sigma)\delta_{ij}\,. \end{cases}$$

On ajoute à la loi de comportement (1.1) les équations d'équilibre et les conditions aux limites et initiales:

$$\left.\begin{aligned} &(1.3)\quad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \\ &(1.4)\quad \sigma_{ij}n_j = F^d_i \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \end{aligned}\right\} \quad \text{en bref} \quad \begin{cases} \mathrm{div}\,\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \\ \sigma\cdot n = F^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1.5)\quad v_i = V^d_i \quad \text{sur } \partial\Omega_U\,, \\ &(1.6)\quad \sigma_{ij}|_{t=0} = (\sigma_0)_{ij}\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{en bref} \quad \begin{cases} v = V^d \quad \text{sur } \partial\Omega_U\,, \\ \sigma(0) = \sigma_0\,. \end{cases}$$

Ω désigne l'ouvert borné et de classe $\mathscr{C}^2$ qu'occupe dans $\mathbf{R}^3$ le corps étudié.

2 Quelques Résultats sur les Espaces Fonctionnels du Problème

On adopte les notations suivantes:

$\mathbf{R}^9_s$: espace des tenseurs 3×3 symétriques (indice s). Le produit scalaire et la norme sur $\mathbf{R}^9_s$ sont notés $(\xi,\eta)_{\mathbf{R}^9_s}$ et $|\xi|_{\mathbf{R}^9_s}$.

$$H = L^2(\Omega)^9_s = \{\tau = (\tau_{ij}),\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\,,\ \tau_{ij} \in L^2(\Omega)\}\,.$$

H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(2.1)\qquad (\sigma,\tau)_H = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\,\mathrm{d}x\,.$$

On note $|\cdot|_H$ la norme correspondante.

$$X_{p,r} = \{\tau = (\tau_{ij}),\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\,,\ \tau^D_{ij} \in L^p(\Omega),\ \mathrm{Tr}(\tau) \in L^r(\Omega)\}\,.$$

$X_{p,r}$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$(2.2)\qquad \|\tau\|_{X_{p,r}} = \|\tau^D\|_{L^p(\Omega)^9_s} + \|\mathrm{Tr}(\tau)\|_{L^r(\Omega)}\,.$$

Pour $1 \leqslant p,r < +\infty$, le dual de $X_{p,r}$ est $X_{p',r'}$ (cf. [2]), et pour $1 < p,r < +\infty$, $X_{p,r}$ est réflexif.

$$U_{q,s} = \{u = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}\,,\ u_i \in L^q(\Omega),\ \varepsilon_{ij}(u) \in X_{q,s}\}\,.$$

$U_{q,s}$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$(2.3)\qquad \|u\|_{U_{q,s}} = \|u\|_{L^q(\Omega)^3} + \|\varepsilon^D(u)\|_{L^q(\Omega)^9_s} + \|\mathrm{Tr}(\varepsilon(u))\|_{L^s(\Omega)}\,.$$

$$\Sigma_{p,r} = \{\sigma \in X_{p,r}\,,\ \mathrm{div}\,\sigma \in L^p(\Omega)^3\}\,.$$

Les espaces $\Sigma_{p,r}$ et $U_{q,s}$ ont été étudiés en détail par Geymonat-Suquet [2]. Nous rappelons ici, sans démonstration, les résultats essentiels de [2], [3].

Théorème 1 (Inégalité de Korn dans $W^{1,q}(\Omega)^3$) *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $1 < q < +\infty$, $U_{q,q}$ est égal à $W^{1,q}(\Omega)^3$, et il existe deux constantes c_1 et $c_2 > 0$, telles que*

$$c_1\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)^3} \leqslant \|u\|_{U_{q,q}} \leqslant c_2\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)^3}\,.$$

Pour $s \geqslant q$, $U_{q,s}$ est donc inclus dans $W^{1,q}(\Omega)^3$:

$$(2.4)\qquad U_{q,s} = \{u \in W^{1,q}(\Omega)^3;\ \mathrm{div}\,u = \mathrm{Tr}(\varepsilon(u)) \in L^s(\Omega)^3\}\,.$$

Par les théorèmes classiques de trace [4], il existe une application trace γ linéaire continue et surjective de $W^{1,q}(\Omega)^3$ sur $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)^3$, et par conséquent de $U_{q,s}$ dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)^3$. Pour $s > q$, l'inclusion de $U_{q,s}$ dans $W^{1,q}(\Omega)^3$ étant stricte, on peut se demander si l'information $\mathrm{div}\,u = \mathrm{Tr}\,\varepsilon(u) \in L^s(\Omega)$ ne restreint pas l'espace des traces de $U_{q,s}$. Il n'en est rien comme l'établit le théorème suivant:

Théorème 2 *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $1 < q \leqslant s$, $1 < q < +\infty$, l'application trace γ est linéaire continue et surjective de $\boldsymbol{U}_{q,s}$ sur $\boldsymbol{W}^{1-1/q,q}(\partial\Omega)^3$. De plus, il existe un relèvement continu de $\boldsymbol{W}^{1-1/q,q}(\partial\Omega)^3$ muni de sa topologie usuelle dans $\boldsymbol{U}_{q,s}$ muni de la norme* (2.3).

Par un raisonnement de dualité, on en déduit le

Théorème 3 *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$ et $1 < r \leqslant p < +\infty$. Pour tout τ de $\Sigma_{p,r}$, on peut définir le vecteur de composantes $\tau_{ij}\boldsymbol{n}_j$ dans $\boldsymbol{W}^{-1/p,p}(\partial\Omega)^3$. On a de plus la formule de Green*

$$(2.5)\qquad \int_\Omega \tau_{ij}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{u}_i\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \tau_{ij}\boldsymbol{n}_j\boldsymbol{u}_i\,\mathrm{d}\Gamma, \qquad \forall \tau \in \Sigma_{p,r},\quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{p',r'},$$

où p' et r' sont les exposants conjugués de p et r:

$$p' = \frac{p}{p-1}; \qquad r' = \frac{r}{r-1}.$$

Ces théorèmes de trace nous permettent de posser, pour $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)^3$, $F^d \in \boldsymbol{W}^{-1/p,p}(\partial\Omega)^3$, $V^d \in \boldsymbol{W}^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)^3$:

$$\boldsymbol{U}_{q,s}(V^d) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{q,s},\ \boldsymbol{u} = V^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U\};$$

$$\Sigma_{p,r}(\boldsymbol{f}, F^d) = \{\tau \in \Sigma_{p,r},\ \operatorname{div}\tau + \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,\ \tau\cdot\boldsymbol{n} = F^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F\}.$$

Proposition 1 *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$, $1 < q \leqslant s < +\infty$, $\operatorname{mes}(\partial\Omega_U) > 0$. Alors sur $\boldsymbol{U}_{q,s}(0)$ la quantité* (2.6) *suivante définit une norme équivalente à la norme de $\boldsymbol{U}_{q,s}$:*

$$(2.6)\qquad \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}_{q,s}(0)} = \|\varepsilon(\boldsymbol{u})\|_{\boldsymbol{X}_{q,s}} = \|\varepsilon^D(\boldsymbol{u})\|_{L^q(\Omega)_s} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{L^s(\Omega)}.$$

Proposition 2 *Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$, $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{X}_{q,s}$, $1 < q \leqslant s < +\infty$. Alors, il existe $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{q,s}(0)$ tel que $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{e}$ si et seulement si:*

$$(2.7)\qquad \int_\Omega \tau_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall \tau \in \Sigma_{q',s'}(0,0).$$

Dans toute la suite de ce travail, l'exposant p sera celui de la loi de Norton (1.1), q sera l'exposant conjugué p', r et s seront égaux à 2. On suppose, de plus, que $p \geqslant 2$:

$$(2.8)\qquad p \geqslant 2, \quad q = p' = \frac{p}{p-1} \leqslant 2, \quad r = s = 2.$$

Lorsqu'aucune ambiguité ne sera possible, nous supprimerons les indices p, q, r, s, dans les différents espaces $\boldsymbol{X}_{p,r}$, $\boldsymbol{U}_{q,s}$, $\Sigma_{p,r}$ ...

Pour $\xi \in \mathbf{R}^9_s$, on définit le potentiel de force *local* φ du matériau par:

$$\varphi(\xi) = \frac{\lambda}{p}|\xi^D|^p_{\mathbf{R}^9_s} \qquad (\lambda > 0)$$

et pour $\sigma \in \boldsymbol{X}$, on définit le potentiel de force *global* Φ par

$$\Phi(\sigma) = \int_\Omega \varphi(\sigma(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |\sigma^D(x)|^p_{\mathbf{R}^9_s}\,\mathrm{d}x.$$

φ et Φ définissent des fonctions convexes, partout différentiables sur $\mathbf{R}^9_s$ et $\boldsymbol{X}$. De plus, leurs différentielles vérifient

$$(2.9)\qquad (\forall \sigma \in \boldsymbol{X}), \qquad \partial\Phi(\sigma)(x) = \partial\varphi(\sigma(x)) = \lambda|\sigma^D(x)|^{p-2}_{\mathbf{R}^9_s}\sigma^D(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

3 Existence et Unicité d'une Solution

On fait, sur les coefficients $\boldsymbol{A}_{ijkh}$ les hypothèses classiques:

$$(\mathrm{H1})\qquad \begin{cases} \boldsymbol{A}_{ijkh} = \boldsymbol{A}_{khij} = \boldsymbol{A}_{jikh}; \\ \boldsymbol{A}_{ijkh} \in \boldsymbol{L}^\infty(\Omega) : \exists\, \beta > 0, \qquad |\boldsymbol{A}_{ijkh}(x)| \leqslant \beta \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \exists\, \alpha > 0, \qquad \boldsymbol{A}_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geqslant \alpha|\xi|^2_{\mathbf{R}^9_s}, \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^9_s. \end{cases}$$

De plus, les hypothèses faites sur les données $\boldsymbol{f}$, F^d, V^d, σ^0, Ω, se déduisent des suivantes:

$$(\mathrm{H2})\qquad \begin{cases} \text{Il existe un champ de contraintes } \chi \text{ vérifiant} \\ \chi \in \boldsymbol{W}^{2,\infty}(0,T;X); \\ \chi(t) \in \Sigma(\boldsymbol{f}(t), F^d(t)), \qquad \forall\, t \in [0,T]; \end{cases}$$

$$(\mathrm{H3})\qquad \begin{cases} \text{Il existe un champ de vitesses } \tilde{\boldsymbol{v}} \text{ vérifiant} \\ \tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{W}^{2,\infty}(0,T;\boldsymbol{U}); \\ \tilde{\boldsymbol{v}}(t) \in \boldsymbol{U}(V^d(t)), \quad \forall\, t \in [0,T]; \end{cases}$$

(H4) $\sigma_0 \in \Sigma(f(0), F^d(0))$;

(H5) Ω est un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^2$, $\operatorname{mes}\partial\Omega_U > 0$.

Théorème 4 *Sous les hypothèses* (H1) – (H5) *ci-dessus, il existe une unique solution $(\sigma, \boldsymbol{v})$ du problème d'évolution* (1.1) – (1.6) *possédant la régularité:*

$$\sigma \in \boldsymbol{W}^{1,2}(0,T;\boldsymbol{H}) \cap \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{U}).$$

Preuve: On se ramène tout d'abord à un problème homogène; en posant

$$\bar\sigma = \sigma - \chi, \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - \tilde{\boldsymbol{v}}, \qquad \boldsymbol{g} = \varepsilon(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t},$$

le problème devient:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\bar\sigma, \bar{\boldsymbol{v}}) \text{ vérifiant:} \\ A\dfrac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}t} + \partial\varphi(\bar\sigma + \chi) = \varepsilon(\bar{\boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{g} \quad \text{dans} \quad \Omega; \\ \operatorname{div}\bar\sigma = 0 \quad \text{dans}\,\Omega, \quad \bar\sigma\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F, \quad \bar{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_U; \\ \bar\sigma(0) = \bar\sigma_0 = \sigma_0 - \chi(0). \end{cases}$$

On se propose de résoudre (3.1) par un schéma implicite en temps.

3.1 Schéma implicite

$[0,T]$ est divisé en N intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ de longueur $\delta t = T/N$, $t_n = n\delta t$. Pour une fonction $\varkappa$ définie sur $[0,T]$, nous notons $\varkappa_n$ pour $\varkappa(t_n)$. Le schéma implicite considéré est le suivant:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \bar\sigma_{n-1} \text{ étant définie par récurrence,} \\ \text{trouver } \bar\sigma_n \in \Sigma(0,0),\ \bar v_n \in \boldsymbol{U}(0) \text{ vérifiant} \\ \dfrac{\boldsymbol{A}\bar\sigma_n - \boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}}{\delta t} + \partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n) = \varepsilon(\bar v_n) + \boldsymbol{g}_n \quad \text{p.p. } x \in \Omega\,. \end{cases}$$

On résoud tout d'abord (3.2) en contraintes seulement: en multipliant (3.2) par $\tau \in \Sigma(0,0)$, on obtient, compte-tenu de l'orthogonalité entre $U(0)$ et $\Sigma(0,0)$ (cf. (2.7)):

$$(3.3)\quad \begin{cases} \int_\Omega \left(\dfrac{\boldsymbol{A}\bar\sigma_n - \boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}}{\delta t}, \tau\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega (\partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n), \tau)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{g}_n \tau\,\mathrm{d}x\,, \\ \forall\, \tau \in \Sigma(0,0), \quad \bar\sigma_n \in \Sigma(0,0)\,. \end{cases}$$

Le problème (3.3) admet, pour chaque $n \geqslant 1$, une solution unique rendant minimum sur $\Sigma(0,0)$ la fonctionnelle

$$(3.4)\quad J_n(\bar\sigma_n) = \operatorname*{Min}_{\tau\in\Sigma(0,0)} J_n(\tau) = \frac{1}{2\delta t}\int_\Omega (\boldsymbol{A}\tau, \tau)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi(\tau + \chi_n)\,\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega \boldsymbol{g}_n \tau\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{\delta t}(\boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}, \tau)\,\mathrm{d}x\,.$$

$\Sigma(0,0)$ est un sous-espace fermé de l'espace réflexif $\boldsymbol{X}$ sur lequel la fonctionnelle strictement convexe J_n vérifie, en vertu de (H1), (H2), (H3):

$$\lim_{\|\tau\|_{\boldsymbol{X}} \to +\infty} J_n(\tau) = +\infty\,,$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de $\bar\sigma_n$, solution de (3.2). L'élément $\boldsymbol{e}_n$ défini par

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{A}\bar\sigma_n - \boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}}{\delta t} + \partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n) - \boldsymbol{g}_n$$

vérifie

$$(3.5)\quad \boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{X}' \qquad (\text{rappel } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{p,2}, \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}_{q,2})\,;$$

$$(3.6)\quad \int_\Omega \boldsymbol{e}_n \tau\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad \forall\, \tau \in \Sigma(0,0)\,.$$

En effet, (3.6) résulte de la définition de $\bar\sigma_n$. Quant à (3.5), on note que $\bar\sigma_n \in \boldsymbol{X}$, donc $\bar\sigma_n + \chi_n \in \boldsymbol{X}$ (hypothèse H2) et donc $\partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n) \in \boldsymbol{X}' = (\boldsymbol{X}_{p,2})' = \boldsymbol{X}_{q,2}$. D'autre part,

$$\frac{\boldsymbol{A}\bar\sigma_n - \boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \in \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{p,2} \subset \boldsymbol{X}_{q,2} = \boldsymbol{X}' \qquad (p \geqslant 2 \geqslant q,\ \Omega \text{ borné})$$

et $\boldsymbol{g}_n \in \boldsymbol{X}'$ (hypothèses (H2), (H3) et définition de $\boldsymbol{g}$), ce qui prouve (3.5).

La Proposition 2 montre alors qu'il existe $\bar v_n \in \boldsymbol{U}(0)$ tel que

$$\boldsymbol{e}_n = \varepsilon(\bar v_n)\,.$$

Le couple $(\bar\sigma_n, \bar v_n)$ ainsi défini est l'unique solution de (3.2) (l'unicité de $\bar\sigma_n$ résulte de la stricte convexité de J_n, l'unicité de $\bar v_n$ résulte de celle de $\bar\sigma_n$).

On pose

$$(3.7)\quad \sigma_n = \bar\sigma_n + \chi_n \in \Sigma(\boldsymbol{f}_n, F_n^d)\,; \qquad \boldsymbol{v}_n = \bar v_n + \tilde v_n \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{v}_n^d)\,.$$

Pour une suite $(\varkappa_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans un espace vectoriel, on note $\varkappa_N(t)$ son interpolée affine en temps, et $\varkappa_N^*(t)$ la fonction en escalier définie par cette suite:

$$\varkappa_N(t) = (\varkappa_n - \varkappa_{n-1})\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + \varkappa_{n-1}\,, \qquad \forall\, t \in [t_{n-1}, t_n]\,;$$
$$\varkappa_N^*(t) = \varkappa_{n-1} \quad \text{si} \quad t \in [t_{n-1}, t_n[\,.$$

Nous allons nous intéresser au comportement des suites $\bar\sigma_N$, σ_N, $\bar\sigma_N^*$, σ_N^*, $\bar v_N^*$, $\boldsymbol{v}_N^*$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3.2 Estimations a priori

Estimations I Multiplions (3.2) par $\delta t\bar\sigma_n$. Après usage de l'orthogonalité (2.7) entre $\boldsymbol{U}(0)$ et $\Sigma(0,0)$, et sommation de 1 à m, $(m \leqslant N)$, des égalités ainsi obtenues, il vient

$$(3.9)\quad \sum_{n=1}^m \int_\Omega (\boldsymbol{A}\bar\sigma_n - \boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}, \bar\sigma_n)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^m \int_\Omega \delta t(\partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n), \bar\sigma_n)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=1}^m \int_\Omega \delta t(g_n, \bar\sigma_n)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par convexité du potentiel Φ, on obtient

$$\Phi(\bar\sigma_n + \chi_n) - \Phi(\chi_n) \leqslant \int_\Omega (\partial\varphi(\bar\sigma_n + \chi_n), \bar\sigma_n)\,\mathrm{d}x\,.$$

D'autre part,

$$(A\bar\sigma_n - A\bar\sigma_{n-1}, \bar\sigma_n) \geqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\bar\sigma_n, \bar\sigma_n) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\bar\sigma_{n-1}, \bar\sigma_{n-1})\,;$$

par suite, (3.9) devient:

$$\frac{\alpha}{2}|\bar\sigma_m|_{\boldsymbol{H}}^2 \leqslant \frac{\alpha}{2}|\bar\sigma_m|_{\boldsymbol{H}}^2 + \sum_{n=1}^m \delta t\,\Phi(\sigma_n) \leqslant \frac{\beta}{2}|\bar\sigma_0|_{\boldsymbol{H}}^2 + \sum_{n=1}^m \delta t\,\Phi(\chi_n)$$
$$+ \sum_{n=1}^m \delta t\,\|g_n\|_{X'}\,\|\bar\sigma_n\|_{\boldsymbol{X}}\,.$$

Mais, par (H2) et (H3), $g \in W^{1,\infty}(0,T;X')$, $\chi \in W^{2,\infty}(0,T;X)$ et donc

$$\|g_n\|_{X'}\|\bar{\sigma}_n\|_X \leqslant c_1(\|\sigma_n\|_X + c_2)\,.$$

Mais

(3.10) $\|\sigma_n\|_X \leqslant \|\sigma_n^D\|_X + |\sigma_n|_H$,

et en utilisant l'inégalité $x^{1/p} \leqslant \dfrac{x}{\eta} + \eta^{1/(p-1)}$, $\forall\, \eta > 0$, on établit

(3.11) $$\|\sigma_n^D\|_X \leqslant \lambda^{-1/p}\Phi(\sigma_n)^{1/p} \leqslant \lambda^{-1/p}\left(\frac{\Phi(\sigma_n)}{\eta} + \eta^{1/(p-1)}\right), \qquad \forall\, \eta > 0\,.$$

On choisit $\eta = c_1^{-1}\lambda^{-1/p}$ de sorte que

$$c_1\|\sigma_n^D\|_X \leqslant \Phi(\sigma_n) + c_3\,.$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{m} \delta t\|g_n\|_{X'}\|\bar{\sigma}_n\|_X \leqslant \sum_{n=1}^{m} \delta t\Phi(\sigma_n) + c_1\sum_{n=1}^{m}\delta t|\sigma_n|_H + c_5\,.$$

Au total, on obtient

$$|\bar{\sigma}_m|_H^2 \leqslant c_6 + c_7\sum_{n=1}^{m}\delta t|\bar{\sigma}_n|_H^2\,.$$

Par une version discrète du lemme de Gronwall, on obtient

$$|\bar{\sigma}_m|_H^2 \leqslant c\,, \quad \text{i.e.}$$

(3.12) $\bar{\sigma}_N$ et $\bar{\sigma}_N^*$ sont bornées dans $L^\infty(0,T;H)$ lorsque $N \to +\infty$ et par l'hypothèse (H2)

(3.13) σ_N et σ_N^* sont bornées dans $L^\infty(0,T;H)$ lorsque $N \to +\infty$.

Estimations II Multiplions (3.2) par $\sigma_n - \sigma_{n-1}$. Il vient, après sommation de 1 à $m (m \leqslant N)$:

$$\delta t\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega\left(\frac{A\bar{\sigma}_n - A\bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}, \frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(\partial\varphi(\sigma_n), \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{n=1}^{m}\delta t\int_\Omega\left(\frac{A\bar{\sigma}_n - A\bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}, \frac{\chi_n - \chi_{n-1}}{\delta t}\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(\varepsilon(\bar{v}_n), \chi_n - \chi_{n-1})\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(g_n, \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x\,.$$

On remarque que

(3.14) $$\Phi(\sigma_n) - \Phi(\sigma_{n-1}) \leqslant \int_\Omega(\partial\varphi(\sigma_n), \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x\,.$$

D'autre part, on déduit de (3.2)

(3.15) $$\|\varepsilon(\bar{v}_n)\|_X \leqslant \beta\left|\frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}\right|_H + \|g_n\|_{X'} + \|\partial\varphi(\sigma_n)\|_{X'}\,.$$

Or

(3.16) $$\|\partial\varphi(\sigma_n)\|_{X'} \leqslant \lambda\|\sigma_n^D\|_X^{p-1} \leqslant \lambda(\Phi(\sigma_n) + 1)\,,$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(\varepsilon(\bar{v}_n), \chi_n - \chi_{n-1})\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{m}\delta t\|\varepsilon(\bar{v}_n)\|_{X'}\left\|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^\infty(0,T;H)}$$

$$\leqslant c_1\sum_{n=1}^{m}\delta t\left|\frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}\right|_H + c_2\sum_{n=1}^{m}\delta t\Phi(\sigma_n) + c_3\,.$$

De même

$$\delta t\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega\left(\frac{A\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}, \frac{\chi_n - \chi_{n-1}}{\delta t}\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{m}\delta t\left|\frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}}{\delta t}\right|\right)\alpha\left\|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^\infty(0,T;H)}\,.$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(g_n, \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1}\int_\Omega(g_n - g_{n+1}, \sigma_n)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega(g_m, \sigma_m) - (g_1, \sigma_0)\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(g_n, \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left\|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^\infty(0,T;X')}\sum_{n=1}^{m}\delta t\|\sigma_n\|_X$$

$$+ \|g\|_{L^\infty(0,T;X')}(\|\sigma_m\|_X + \|\sigma_0\|_X)\,.$$

Compte-tenu de (3.10) et des estimations I

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega(g_n, \sigma_n - \sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x\right| \leqslant c_4\sum_{n=1}^{m-1}\delta t\|\sigma_n^D\|_X + c_5\|\sigma_m^D\|_X + c_6\,.$$

En notant

$$c_7 = \alpha\left\|\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^\infty(0,T;H)} + c_1\,,$$

on remarque que

$$(3.17)\quad c_7 \sum_{n=1}^{m} \delta t \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|_H \leqslant \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{m} \delta t \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|_H^2 + \frac{2c_7}{\alpha} T .$$

D'autre part, en utilisant (3.11) avec $\eta = 2c_5^{-1}\lambda^{-1/p}$, il vient

$$(3.18)\quad c_5 \|\sigma_m^D\|_X \leqslant \frac{\Phi(\sigma_m)}{2} + c_8 .$$

Au total, on obtient

$$(3.19)\quad \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{m} \delta t \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|_H^2 + \frac{1}{2}\Phi(\sigma_m) \leqslant c_9 \sum_{n=1}^{m} \delta t \Phi(\sigma_n) + c_{10} .$$

Une version discrète du lemme de Gronwall donne

$$(3.20)\quad \Phi(\sigma_m) \leqslant c , \qquad \forall\, m \leqslant N, \text{ lorsque } N \text{ tend vers } +\infty,$$

ce qui, compte-tenu de (3.18) et des Estimations I, donne

$$\|\sigma_m\|_X \leqslant c , \qquad \forall\, m \leqslant N, \text{ lorsque } N \text{ tend vers } +\infty,$$

c.à.d.

$$(3.21)\quad \sigma_N, \sigma_N^*, \sigma_N, \bar\sigma_N^*, \quad \text{sont bornées dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}) .$$

L'estimation (3.20) reportée dans (3.19) avec $m = N$, donne

$$\sum_{n=1}^{m} \delta t \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|_H^2 \leqslant c ,$$

i.e.

$$(3.22)\quad \frac{\mathrm{d}\bar\sigma_N}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\sigma_N}{\mathrm{d}t} \quad \text{sont bornées dans} \quad \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{H}) .$$

En revenant à (3.2), on obtient, compte-tenu de la Proposition 2:

$$(3.23)\quad \bar{\boldsymbol{v}}_N^* \quad \text{bornée dans} \quad \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{U}) ,$$

et par l'hypothèse (H3),

$$(3.24)\quad \boldsymbol{v}_N^* \quad \text{bornée dans} \quad \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{U}) .$$

3.3 Passage à la limite $N \to +\infty$

On déduit de ces estimations qu'il existe $\bar\sigma, \sigma \in \boldsymbol{W}^{1,2}(0,T;\boldsymbol{H}) \cap \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X})$, $\bar\sigma^*, \sigma^* \in \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X})$ et $\bar{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{U})$, tels que, à l'extraction d'une sous-suite près, on ait

$$\begin{array}{llll}
\bar\sigma_N \quad (\text{resp. } \sigma_N) \to \bar\sigma & (\text{resp. } \sigma) & \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}) & \text{faible} * ; \\
\dfrac{\mathrm{d}\bar\sigma_N}{\mathrm{d}t} \left(\text{resp. } \dfrac{\mathrm{d}\sigma_N}{\mathrm{d}t}\right) \to \dfrac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}t} & \left(\text{resp. } \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right) & \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{H}) & \text{faible} ; \\
\bar\sigma_N^* \quad (\text{resp. } \sigma_N^*) \to \bar\sigma^* & (\text{resp. } \sigma^*) & \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}) & \text{faible} * ; \\
\bar{\boldsymbol{v}}_N^* \quad (\text{resp. } \boldsymbol{v}_N^*) \to \bar{\boldsymbol{v}} & (\text{resp. } \boldsymbol{v}) & \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{U}) & \text{faible} .
\end{array}$$

On prétend que $\bar\sigma = \bar\sigma^*$ et $\sigma = \sigma^*$. En effet, par la définition de $\bar\sigma_N$ et $\bar\sigma_N^*$, on a pour $t \in [t_{n-1}, t_n[$

$$|\bar\sigma_N(t) - \bar\sigma_N^*(t)|_H = \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|_H |t - t_{n-1}| \leqslant |\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}|_H$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{m} \delta t \left| \frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{T}{N}\right)^{1/2} \qquad \left(\delta t = \frac{T}{N}\right),$$

et par l'estimation (3.22),

$$\lim_{N \to +\infty} (\bar\sigma_N - \bar\sigma_N^*) = 0 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{H}) \quad \text{fort},$$

ce qui prouve $\bar\sigma = \bar\sigma^*$; le même raisonnement établit l'égalité $\sigma = \sigma^*$.
De plus, par les hypothèses (H2) et (H3), on a

$$(3.25)\quad \chi_N \to \chi \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}) \quad \text{fort} \quad (\chi_N \text{ interpolée affine de } \chi) ;$$

$$\chi_N^* \to \chi \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}) \quad \text{fort} \quad (\chi_N^* \text{ en escalier}) ;$$

$$(3.26)\quad \tilde{\boldsymbol{v}}_N^* \to \tilde{\boldsymbol{v}} \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{U}) \quad \text{fort} \quad (v_N^* \text{ en escalier}) .$$

Par suite, $\bar\sigma$, σ, et $\bar{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v}$, sont liées par

$$\sigma(t) = \bar\sigma(t) + \chi(t), \ \boldsymbol{v}(t) = \bar{\boldsymbol{v}}(t) + \tilde{\boldsymbol{v}}(t), \quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

Condition initiale L'application $\tau \to \tau(0)$ est continue de $\boldsymbol{W}^{1,2}(0,T;\boldsymbol{H})$ dans $\boldsymbol{H}$. Par semi-continuité inférieure, on a

$$|\sigma(0) - \sigma_0|_H \leqslant \liminf_{N \to +\infty} |\sigma_N(0) - \sigma_0|_H = 0 ,$$

i.e.

$$(3.27)\quad \sigma(0) = \sigma_0 .$$

Equations d'équilibre et conditions aux limites On pose

$$\varkappa = \{\tau \in \boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}), \tau(t) \in \Sigma(0,0), \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\} .$$

$\varkappa$ est un convexe fortement fermé de $\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X})$. En effet, si τ^n est une suite d'éléments de $\varkappa$ convergeant fortement dans $\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X})$, on a, en particulier,

$$(3.28)\quad \lim_{n \to +\infty} \tau^n(t) = \tau(t) \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{X}, \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[;$$

$$(3.29)\quad \int_\Omega \tau^n(t)\varepsilon(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x = 0 , \qquad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}(0) , \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\text{ (proposition 2)}.$$

On passe à la limite dans (3.29), grâce à (3.28):

$$\int_\Omega \tau(t)\varepsilon(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x = 0 , \qquad \forall\, u \in U(0) , \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[,$$

et donc $\tau(t) \in \Sigma(0,0)$, p.p. $t \in]0,T[$, ce qui prouve que $\varkappa$ est fortement fermé. $\varkappa$ étant convexe, il est également fermé pour la topologie faible $*$ de $\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X})$. Par suite $\bar\sigma \in \varkappa$ et

(3.30) $\sigma(t) \in \Sigma(f(t), F^d(t))$, p.p. $t \in]0, T[$.

De la même façon, on pose

$$\mathscr{H} = \{u \in L^2(0, T; U), u(t) \in U(0), \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[\}.$$

On montre que $\mathscr{H}$ est un convexe fermé de $L^2(0, T; U)$. Par suite, $\bar{v}(t) \in U(0)$, p.p. $t \in]0, T[$ et

(3.31) $v(t) \in U(v^d(t))$, p.p. $t \in]0, T[$.

Loi de comportement $\bar{\sigma}_N$, σ_N^*, $\bar{\sigma}_N^*$, vérifient

$$A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt} + \partial\varphi(\sigma_N^*) = \varepsilon(\bar{v}_N^*) + g_N^*, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[.$$

Multiplions cette égalité par $\tau(x)\theta(t)$, où $\tau \in \mathscr{D}(\Omega)_s^9$, $\theta \in \mathscr{D}(]0, T[)$, on a

(3.32) $$\int_0^T \int_\Omega \theta(t)\tau(x) \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt} + \partial\varphi(\sigma_N^*) - \varepsilon(\bar{v}_N^*) - g_N^* \right) dx dt = 0.$$

Mais, par (H2) et (H3),

(3.33) $$\lim_{N \to +\infty} g_N^* = g \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; X') \quad \text{fort}.$$

De plus, par (3.18) et (3.20),

$$\partial\varphi(\sigma_N^*) \quad \text{est borné dans} \quad L^\infty(0, T; X');$$

il existe donc $\psi \in L^\infty(0, T; X')$ tel que à l'extraction d'une sous-suite près:

$$\partial\varphi(\sigma_N^*) \to \psi \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; X') \quad \text{faible} *.$$

On passe à la limite dans (3.30):

$$\int_0^T \int_\Omega \theta(t)\tau(x) \left(A \frac{d\bar{\sigma}}{dt} + \psi - \varepsilon(\bar{v}) - g \right) dx dt = 0,$$

i.e. $$A \frac{d\sigma}{dt} + \psi = \varepsilon(v), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[.$$

Il reste à établir que

(3.34) $\psi = \partial\varphi(\sigma)$.

Cette égalité s'établit par un raisonnement de monotonie. Pour $\tau \in L^\infty(0, T; X)$, on a, par monotonie:

(3.35) $$\int_0^T \int_\Omega (\partial\varphi(\sigma_N^*) - \partial\varphi(\tau), \sigma_N^* - \tau) dx dt \geqslant 0.$$

Mais

(3.36) $$\lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega (\partial\varphi(\tau), \sigma_N^* - \tau) dx dt = \int_0^T \int_\Omega (\partial\varphi(\tau), \sigma - \tau) dx dt.$$

D'autre part,

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial\varphi(\sigma_N^*), \sigma_N^* - \tau) dx dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega (\varepsilon(\bar{v}_N^*), \sigma_N^* - \tau) dx dt + \int_0^T \int_\Omega (g_N^*, \sigma_N^* - \tau) dx dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \sigma_N^* - \tau \right) dx dt.$$

Par les convergences précédentes, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega \left(\varepsilon(\bar{v}_N^*) - A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \tau \right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left(\varepsilon(\bar{v}) - A \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \tau \right) dx dt.$$

Par (3.33) et la convergence de σ_N^* vers σ, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega (g_N^*, \sigma_N^* - \tau) dx dt = \int_0^T \int_\Omega (g, \sigma - \tau) dx dt.$$

De plus,

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega (\varepsilon(\bar{v}_N^*), \sigma_N^*) dx dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega (\varepsilon(\bar{v}_N^*), \chi_N^*) dx dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega (\varepsilon(\bar{v}), \chi) dx dt \quad \text{(par (3.25))}.$$

D'autre part,

$$\int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \sigma_N^* \right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left[\left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \bar{\sigma}_N^* \right) + \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \chi_N^* \right) \right] dx dt$$

et $$\lim_{N \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \chi_N^* \right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}}{dt}, \chi \right) dx dt \quad \text{(par (3.25))}.$$

Quant au terme $\int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \sigma_N^* \right) dx dt$, on remarque que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(A \frac{d\bar{\sigma}_N}{dt}, \bar{\sigma}_N^* \right) dx dt = \sum_{n=1}^m \int_\Omega (A\bar{\sigma}_n - A\bar{\sigma}_{n-1}, \bar{\sigma}_{n-1}) dx$$
$$= \sum_{n=1}^m \int_\Omega \frac{1}{2}(A\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_n) - \frac{1}{2}(A\bar{\sigma}_{n-1}, \bar{\sigma}_{n-1})$$
$$- \frac{1}{2}(A\bar{\sigma}_n - A\bar{\sigma}_{n-1}, \bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{n-1}) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_\Omega (A\bar{\sigma}_N(T), \bar{\sigma}_N(T)) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (A\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_0) dx + c_N,$$

où c_N vérifie $\lim_{N\to+\infty} c_N = 0$, puisque

$$|c_N| = \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega (A\bar\sigma_n - A\bar\sigma_{n-1}, \bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1})\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{m}\delta t\left|\frac{\bar\sigma_n - \bar\sigma_{n-1}}{\delta t}\right|_H^2\right)\frac{T}{N} \qquad \left(\delta t = \frac{T}{N}\right).$$

Par semi-continuité inférieure de l'application $\tau \to \tau(T)$ de $\boldsymbol{W}^{1,2}(0,T;\boldsymbol{H})$ dans $\boldsymbol{H}$, on obtient

$$\liminf_{N\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(A\frac{\mathrm{d}\bar\sigma_N}{\mathrm{d}t}, \bar\sigma_N^*\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega (A\bar\sigma(T), \bar\sigma(T))\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega (A\bar\sigma_0, \bar\sigma_0)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^T\int_\Omega\left(A\frac{d\bar\sigma}{\mathrm{d}t}, \bar\sigma\right)\mathrm{d}x.$$

Au total, on a établi

$$\text{(3.37)}\quad \limsup_{N\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega (\partial\varphi(\sigma_N^*), \sigma_N^* - \tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^T\int_\Omega (\varepsilon(\bar v), \sigma - \tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega\left(A\frac{\mathrm{d}\bar\sigma}{\mathrm{d}t}, \sigma - \tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega (\boldsymbol{g}, \sigma - \tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^T\int_\Omega (\psi, \sigma - \tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

On passe alors à la limite sup dans (3.35):

$$\text{(3.38)}\quad \int_0^T\int_\Omega (\psi - \partial\varphi(\tau), \sigma - \tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0, \forall\,\tau \in L^\infty(0,T;X).$$

On prend dans (3.38), τ sous la forme $\tau_\mu = \sigma + \mu\tilde\tau$ où $\tilde\tau \in \mathscr{D}(]0,T[\times\Omega)_s^9$, $\mu \geqslant 0$:

$$\text{(3.39)}\quad \int_0^T\int_\Omega (\psi - \partial\varphi(\tau_\mu), \tilde\tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On fait tendre μ vers 0 dans (3.39) et on obtient, par hémicontinuité de l'application $\tau \to \partial\varphi(\tau)$,

$$\int_0^T\int_\Omega (\psi - \partial\varphi(\sigma), \tilde\tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0, \qquad \forall\,\tilde\tau \in \mathscr{D}(]0,T[\times\Omega)_s^9,$$

i.e. $\psi = \partial\varphi(\sigma)$ dans $\mathscr{D}'(]0,T[\times\Omega)$ et donc dans $\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{X}')$.

On a donc établi que $(\sigma, \boldsymbol{v})$ est solution du problème (1.1) – (1.6).

Unicité de la solution Supposons qu'il existe deux solutions $(\sigma_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(\sigma_2, \boldsymbol{v}_2)$ au problème posé. Alors

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) - \sigma_2(t) \in \Sigma(0,0), \qquad \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t) \in \boldsymbol{U}(0)$$

et

$$\text{(3.40)}\quad A\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \partial\varphi(\sigma_1) - \partial\varphi(\sigma_2) = \varepsilon(\boldsymbol{v}), \qquad \sigma(0) = 0.$$

En multipliant (3.40) par σ, on obtient, compte-tenu de l'orthogonalité entre $\boldsymbol{U}(0)$ et $\Sigma(0,0)$,

$$\int_0^t\int_\Omega\left(A\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}, \sigma\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_\Omega (\partial\varphi(\sigma_1) - \partial\varphi(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0,$$

et par monotonie de $\partial\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (A\sigma(t), \sigma(t))\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega (A\sigma(0), \sigma(0))\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall\,t \in [0,T],$$

i.e. $\sigma(t) = 0, \forall\,t \in [0,T]$, et par (3.38), $\boldsymbol{v} = 0$.

L'unicité de la solution assure la convergence de *toute* la suite $(\sigma_N, \boldsymbol{v}_N^*)$ vers $(\sigma, \boldsymbol{v})$, et non seulement d'une sous-suite.

Bibliographie

[1] Friaa, A.: Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite. C.R. Acad. Sci. Paris, **286**, série A (1978) 953 – 956

[2] Geymonat, G.; Suquet, P.: Espaces fonctionnels pour les milieux de Norton-Hoff, à paraître

[3] Pelissier, M. C.: Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie. Thèse, Univ. de Paris XI, 1975

[4] Lions, J. L.: Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presses de l'Université de Montréal 1962

M. Djaoua
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
BP 37 Belvédère
Tunis (Tunisie)

P. Suquet
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34060 Montpellier Cedex
et GRECO «Grandes Déformations et Endommagement»

(Received February 1, 1983)