2020-2021 **Aix-Marseille Université**
Mathématiques 2 : Analyse **Licence MPCI, Semestre 2**

Devoir surveillé 1

Exercice 1. Questions de cours

[1,5pt] 1. Soit I un intervalle. Donner la définition de $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

[1,5pt] 2. Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_- < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_+ > 0$.

[2pt] 1. Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

[1pt] 2. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.

[2pt] 3. On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$.

[1pt] 4. Si on suppose seulement $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_- \leq 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_+ \geq 0$, existe-t-il forcément $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$?

Exercice 3. On cherche à optimiser l'éclairement d'une portion de rue de longueur 1 (On ne précise pas les unités, car on fait des math quand même et ce texte ne sert qu'à introduire la constante a !) située entre 2 réverbères. On munit la rue d'un axe. L'intensité lumineuse du réverbère situé en $x = 0$ est fixée à 1 et l'intensité lumineuse du réverbère situé en $x = 1$ vaut a^3 pour un certain $a \in]1, +\infty[$. L'éclairement de la rue au point x est alors donné par

$$\begin{array}{rccl} f & : &]0,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto \frac{1}{x^2} + \frac{a^3}{(1-x)^2} \end{array}.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on admet que $f'(x) = \dfrac{\big((a+1)x-1\big)\big((2a^2+1)x^2-(a+2)x+1\big)}{x^3(1-x)^3}$.

[1,5pt] 1. Montrer qu'il existe un unique point critique $x_0 \in]0,1[$ dont on donnera la valeur en fonction de a.

[1,5pt] 2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[\cup]1-\alpha, 1[\quad f(x) > f(\frac{1}{2})$.

[2pt] 3. Montrer que f admet un minimum global sur $]0,1[$.

[1pt] 4. En quel point est atteint ce minimum ? Justifier.

[2pt] 5. Quelle est la valeur minimale de $a \in]0, +\infty[$ pour avoir $\forall x \in]0, L[\quad f(x) \geq e^3$, c'est à dire une rue bien éclairée tout en faisant des économies d'énergie ?

Exercice 4.

[1pt] 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

[2pt] 2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $\ln(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < 1 + \ln(n)$.
Indication : On pourra commencer par encadrer $\frac{1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$ à l'aide de la question précédente.

[2pt] 3. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite $\gamma \in [0, 1[$.
A titre culturel, cette constante est appelée constante γ d'Euler.