Devoir de contrôle continu n°1

vendredi 10 février 2017

Durée : 2h. Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 2.

2. Le but de cette question est de démontrer le théorème des gendarmes. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe un réel $\epsilon > 0$.
   (a) Traduire à l'aide de quantificateurs la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. En déduire qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont minorés par $\ell - \epsilon$.
   (b) De la même façon, montrer qu'il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorés par $\ell + \epsilon$.
   (c) En déduire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$.
   (d) Conclure.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n - 1 \end{cases}$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 4$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1+(u_n)^2}. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.
2. En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que « La suite $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge » n'est pas une condition suffisante pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
5. En utilisant les théorèmes du cours, étudier la limite des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$b_n = u_{n+1} - u_n, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{u_n} \quad \text{et} \quad d_n = (-1)^n u_n.$$
6. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La condition « $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_{n+1} - y_n) = 0$ » est-elle suffisante pour que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? (Justifier votre réponse).

Exercice 4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_n &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ v_n &= u_n + \dfrac{3}{n}. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.
3. En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. Que vient-on de montrer sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?